

Նավանականությունների փեսություն և վիճակագրություն

Ապրիլ 1, 2024

Առնակ Դալալյան

ENSAE Paris / CREST

Նավանականությունն ու վիճակագրությունը արհեստական բանականության ոլորտում

Ներկյալ համակարգչային գործիքներից որո՞նք են հիմնված հավանականային մոդելների վրա:

- Բարդ մաթեմատիկական հաշվարկ կատարել՝ օրինակ հաշվել $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ կամ լուծել $x^3 + 6x + 6 = 0$ հավասարումը www.wolframalpha.com/
- Ջրել անցանկալի ի-նամակները (SPAM filtering)
- Կատարել թարգմանություն անգլերենից հայերեն՝ translate.google.com
- Կատարել փեքսի ուղղագրական սխալների ստուգում:
- Գտնել ձեր հարցին ամենամոտ պատասխանները՝ համացանցում փնդարված էջերի մեջ: www.google.com
- Գեներացնել փեքս Chat GPT-ի միջոցով, կամ նկար DALL E-ով:
- Շախմատ խաղալ համակարգչի դեմ:

Նավանականությունն ու վիճակագրությունը արհեստական բանականության ոլորտում

Ներկյալ համակարգչային գործիքներից որո՞նք են հիմնված հավանականային մոտեցման վրա:

- Բարդ մաթեմատիկական հաշվարկ կատարել՝ օրինակ հաշվել $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ կամ լուծել $x^3 + 6x + 6 = 0$ հավասարումը www.wolframalpha.com/
- Ջտել անցանկալի ի-նամակները (SPAM filtering)
- Կատարել թարգմանություն անգլերենից հայերեն՝ translate.google.com
- Կատարել փեքսի ուղղագրական սխալների ստուգում:
- Գտնել ձեր հարցին ամենամոտ պատասխանները՝ համացանցում փեղադրված էջերի մեջ: www.google.com
- Գեներացնել փեքստ Chat GPT-ի միջոցով, կամ նկար DALL E-ով:
- Շախմատ խաղալ համակարգչի դեմ:

Այս գործիքներից որո՞նք են օգտագործում վիճակագրություն:

Նավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի 3:

Նավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի 3:
- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի կենտ թիվ:

Նավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի 3:
- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի կենտ թիվ:
- Նույն զառի նիստերը ներկում ենք կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով, ու այն ներում: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստը կլինի կարմիր:

Նավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Նետում ենք զառ, որի նիսպերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպի վրա գրված կլինի 3:
- Նետում ենք զառ, որի նիսպերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպի վրա գրված կլինի կենտ թիվ:
- Նույն զառի նիսպերը ներկում ենք կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով, ու այն նետում: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպը կլինի կարմիր:
- Նույն զառի 3 նիսպերը ներկում ենք կարմիր, 1-ը՝ կապույտ և 2-ը՝ ծիրանագույն գույներով, ու այն նետում: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպը կլինի կարմիր:

Նավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Որն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի 3:
- Ներում ենք զառ, որի նիստերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Որն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստի վրա գրված կլինի կենտ թիվ:
- Նույն զառի նիստերը ներկում ենք կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով, ու այն ներում: Որն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստը կլինի կարմիր:
- Նույն զառի 3 նիստերը ներկում ենք կարմիր, 1-ը՝ կապույտ և 2-ը՝ ծիրանագույն գույներով, ու այն ներում: Որն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիստը կլինի կարմիր:
- Զառի նիստերը ներկված են կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով: Զառը Արամի մոտ է. Շուշանը այն չի տեսնում: Շուշանի նպատակն է հասկանալ, թե այդ զառը ներելիս ինչ հավանականությամբ վերևի նիստը կլինի կարմիր: Ի՞նչ փորձ կարող է անցկացնել Շուշանը, որ կարողանա հասնել իր նպատակին:

Տավանականություն ու վիճակագրություն

Պարզ հարցեր

- Ներում ենք զառ, որի նիսպերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպի վրա գրված կլինի 3:
- Ներում ենք զառ, որի նիսպերի վրա գրված են 1-6 թվերը: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպի վրա գրված կլինի կենտ թիվ:
- Նույն զառի նիսպերը ներկում ենք կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով, ու այն ներում: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպը կլինի կարմիր:
- Նույն զառի 3 նիսպերը ներկում ենք կարմիր, 1-ը՝ կապույտ և 2-ը՝ ծիրանագույն գույներով, ու այն ներում: Ո՞րն է հավանականությունը, որ դեպի վերև ընկած նիսպը կլինի կարմիր:
- Զառի նիսպերը ներկված են կարմիր, կապույտ և ծիրանագույն գույներով: Զառը Արամի մոտ է. Շուշանը այն չի տեսնում: Շուշանի նպատակն է հասկանալ, թե այդ զառը ներելիս ինչ հավանականությամբ վերևի նիսպը կլինի կարմիր: Ի՞նչ փորձ կարող է անցկացնել Շուշանը, որ կարողանա հասնել իր նպատակին:

Եզրակացություն՝ Լրիվ ինֆորմացիա չունենալու դեպքում՝ հավանականություններ հաշվելու համար անհրաժեշտ է անցկացնել փորձեր և գրանցել ելքեր:

Երկու զավակների պարադոքսը

Martin Gardner, Scientific American 1959

Նայանի է, որ Գրիգորն ունի երկու զավակ: Մեզ հետաքրքրում է հասկանալ, թե հետևյալ երկու դեպքերից որում է ավելի մեծ հավանականությունը, որ երկու զավակներն էլ կլինեն փղա:

ա) Գիտենք, որ Գրիգորի առաջին զավակը փղա է:

բ) Գիտենք, որ Գրիգորի զավակներից առնվազն մեկը փղա է:

Երկու զավակների պարադոքսը

Martin Gardner, Scientific American 1959

Նայք՝ ξ , որ Գրիգորն ունի երկու զավակ: Մեզ հետաքրքրում է հասկանալ, թե հետևյալ երկու դեպքերից որում է ավելի մեծ հավանականությունը, որ երկու զավակներն էլ կլինեն փղա:

ա) Գիպենք, որ Գրիգորի առաջին զավակը փղա է:

բ) Գիպենք, որ Գրիգորի զավակներից առնվազն մեկը փղա է:

Տարբերակ 1՝ ա) $1/2$ բ) $1/3$

Տարբերակ 2՝ ա) $1/2$ բ) $1/2$

Եզրակացություն՝ հարկավոր է հստակ նկարագրել այն պայմանները, որոնցում կատարվում է փորձը՝ հնարավոր փարբեր ելքերի հավանականությունները հաշվելու համար:

Երկու զավակների պարադոքսը

Martin Gardner, Scientific American 1959

Նայրնի է, որ Գրիգորն ունի երկու զավակ: Մեզ հեքաքրքրում է հասկանալ, թե հեքաքրքրում է երկու դեպքերից որում է ավելի մեծ հավանականությունը, որ երկու զավակներն էլ կլինեն փղա:

ա) Գիպենք, որ Գրիգորի առաջին զավակը փղա է:

բ) Գիպենք, որ Գրիգորի զավակներից առնվազն մեկը փղա է:

Տարբերակ 1՝ ա) $1/2$ բ) $1/3$

Տարբերակ 2՝ ա) $1/2$ բ) $1/2$

Եզրակացություն՝ հարկավոր է հստակ նկարագրել այն պայմանները, որոնցում կարարվում է փորձը՝ հնարավոր փարբեր ելքերի հավանականությունները հաշվելու համար:

Դեպք 1՝ Մի անգամ փողոցում Գրիգորին հանդիպեցի մի հինգ փարեկան երեխայի հեք, որը Գրիգորին պապա էր ասում:

Դեպք 2՝ Գիպենք, որ Գրիգորի երեխաներից մեկի անունը Արամ է:

Երկու զավակների պարադոքսը

Martin Gardner, Scientific American 1959

Նայք՝ ξ , որ Գրիգորն ունի երկու զավակ: Մեզ հեքաքրքրում է հասկանալ, թե հեքաքրքրում է երկու դեպքերից որում է ավելի մեծ հավանականությունը, որ երկու զավակներն էլ կլինեն փղա:

ա) Գիպենք, որ Գրիգորի առաջին զավակը փղա է:

բ) Գիպենք, որ Գրիգորի զավակներից առնվազն մեկը փղա է:

Տարբերակ 1՝ ա) $1/2$ բ) $1/3$

Տարբերակ 2՝ ա) $1/2$ բ) $1/2$

Եզրակացություն՝ հարկավոր է հստակ նկարագրել այն պայմանները, որոնցում կարարվում է փորձը՝ հնարավոր փարբեր ելքերի հավանականությունները հաշվելու համար:

Դեպք 1՝ Մի անգամ փողոցում Գրիգորին հանդիպեցի մի հինգ փարեկան երեխայի հեք, որը Գրիգորին պապա էր ասում: Տարբերակ 2

Դեպք 2՝ Գիպենք, որ Գրիգորի երեխաներից մեկի անունը Արամ է: Տարբերակ 1

Սահմանումներ՝ ելք, նմուշների փարածություն

- Այն ինչ սփանում ենք փորձի արդյունքում անվանում ենք « ելք »:
 - Ջառի առաջին օրինակում ելքերն էին $1, 2, \dots, 6$:
 - Ջառի մյուս օրինակում ելքերն էին «կարմիր», «կապույտ», «ծիրանագույն»:
 - Ջավակների խնդրում ելքերն էին «փղա, փղա», «աղջիկ, փղա», «փղա, աղջիկ», «աղջիկ, աղջիկ»
- Բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը անվանում ենք «նմուշների փարածություն» կամ «ընտրությամբ փարածություն»:
- Նմուշների փարածության համար հաճախ օգտագործում ենք հունական այբուբենի մեծատառ օմեգա փառը՝ Ω , իսկ ելքերի համար փոքրատառ օմեգան՝ ω :

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (\text{գառ նեփելու 1-ին փորձ})$$

- Նմուշների փարածության որոշման ժամանակ ավելի լավ է լինել զգույշ և ընդգրկել բոլոր հնարավոր արժեքները, նույնիսկ եթե կարծում եք, որ դրանք չեն իրականանա: Օրինակ եթե փորձը կայանում է նրանում, որ Նայասփանի բոլոր դպրոցների այն դասարաններից, որոնք ունեն 25-ից ավել աշակերտ, պատահականորեն ընտրել մեկն ու հաշվել դասարանում փղաների քանակը, պետք չէ բացառել նմուշների փարածությունից 50 արժեքը:

Նմուշների փարածություն

Նմուշների փարածությունն ընտրելիս պետք է լինել շատ ուշադիր:

Օրինակ՝ նետել ենք նարդու երկու զառ: Ո՞րն է նմուշների փարածությունը:

ա)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

բ) {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6},
{2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 3},
{3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 6},
{5, 5}, {5, 6}, {6, 6}

Նմուշների փարածություն

Նմուշների փարածությունն ընտրելիս պետք է լինել շաք ուշադիր:

Օրինակ՝ նետել ենք նարդու երկու զառ: Ռին է նմուշների փարածությունը:

ա)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

բ) {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6},
{2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 3},
{3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 6},
{5, 5}, {5, 6}, {6, 6}

- Ճիշտ է առաջին փարբերակը:

Նմուշների փարածություն

Նմուշների փարածությունն ընտրելիս պետք է լինել շատ ուշադիր:

Օրինակ՝ նետել ենք նարդու երկու զառ: Ռին է նմուշների փարածությունը:

ա)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

բ) {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6},
{2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 3},
{3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 6},
{5, 5}, {5, 6}, {6, 6}

- Ճիշտ է առաջին փարբերակը:
- Երբ ելքը իրենից ներկայացնում է զույգ՝ նպատակահարմար է նմուշների փարածությունը ներկայացնել աղյուսակի փեսքով, ինչպես վերևի օրինակում:

Սահմանումներ՝ պապահույթ

- Այն ինչ սպանում ենք փորձի արդյունքում անվանում ենք « ելք », նշ. ω :
 - Բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը անվանում ենք «նմուշների փարածություն» կամ «ընտրությամբ փարածություն», նշ. Ω :
-
- ա) Պապահույթը մեկ կամ մի քանի ելքերի բազմությունն է
 - բ) Նմուշների փարածության կամայական ենթաբազմություն անվանում ենք պապահույթ:
-

Սահմանումներ՝ պապահույթ

- Այն ինչ սպանում ենք փորձի արդյունքում անվանում ենք « ելք », նշ. ω :
 - Բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը անվանում ենք «նմուշների փարածություն» կամ «ընտրությամբ փարածություն», նշ. Ω :
-

- ա) Պապահույթը մեկ կամ մի քանի ելքերի բազմությունն է
- բ) Նմուշների փարածության կամայական ենթաբազմություն անվանում ենք պապահույթ:

ա) սահմանումը միգուցե ավելի պարզ է, քանի որ հղում չի արվում ենթաբազմություն գաղափարին: Բայց այն իմաստալից առումով թերի է, քանի որ ըստ այդ սահմանման \emptyset -ը չի համարվի պապահույթ:

Սահմանումներ՝ պարահույթ

- Այն ինչ սահմանում ենք փորձի արդյունքում անվանում ենք « ելք », նշ. ω :
 - Բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը անվանում ենք «նմուշների փարածություն» կամ «ընտրությամբ փարածություն», նշ. Ω :
-

- ա) Պարահույթը մեկ կամ մի քանի ելքերի բազմությունն է
- բ) Նմուշների փարածության կամայական ենթաբազմություն անվանում ենք պարահույթ:

ա) սահմանումը միգուցե ավելի պարզ է, քանի որ հղում չի արվում ենթաբազմություն գաղափարին: Բայց այն իմաստային առումով թերի է, քանի որ ըստ այդ սահմանման \emptyset -ը չի համարվի պարահույթ:

- Պարահույթների համար օգտագործում ենք լատինական այբուբենի մեծատառերը՝ A, B, C, D, E, F, \dots . Խուսափում ենք օգտագործել X, Y, Z, W, U, V տառերը, դրանցով կնշանակենք պար. մեծությունները:
- \emptyset -ն անվանում ենք անհնար պարահույթ, Ω -ն՝ հավասարի պարահույթ:
- Կարևոր է պարահույթը սահմանել նմուշների փարածությունից հետո:

Գործողությունների պատահույթների հետ

Նակառակ պատահույթ և միավորում

- Պատահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շատ օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պատահույթի հակառակ պատահույթը նշանակում ենք \overline{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին: Օրինակներ՝
 - $A =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ է», $\overline{A} =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ չէ»
 - 52 խաղաքարերի միջից պատահականորեն ընտրում ենք 2 քար: $B =$ «երկու քարերը նույն գույնի են և նրանցից մեկը 10 է»:
 $\overline{B} =$

Գործողությունների պատահույթների հետ

Նակառակ պատահույթ և միավորում

- Պատահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շարք օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պատահույթի հակառակ պատահույթը նշանակում ենք \overline{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին: Օրինակներ՝
 - $A =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ է», $\overline{A} =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ չէ»
 - 52 խաղաքարերի միջից պատահականորեն ընտրում ենք 2 քար: $B =$ «երկու քարերը նույն գույնի են և նրանցից մեկը 10 է»: $\overline{B} =$ «քարերն ունեն փարբեր գույներ կամ նրանցից ոչ մեկը 10 չէ»:
- A և B պատահույթների միավորում կանվանենք C պատահույթը որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք կամ A -ում են կամ B -ում (հնարավոր է լինեն և A -ում և B -ում): Նշ. $C = A \cup B$:
- Օրինակ՝ թող $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
 $A = \{\text{բոլոր կենար ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega\text{-ն կենար է}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $B = \{\text{բոլոր 3-ի պարիկ ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \equiv 0(\text{mod } 3)\} = \{3, 6, 9\}$
 $C = A \cup B =$

Գործողությունների պատահույթների հետք

Նակառակ պատահույթ և միավորում

- Պատահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շարք օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պատահույթի հակառակ պատահույթը նշանակում ենք \overline{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին: Օրինակներ՝
 - $A =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ է», $\overline{A} =$ «գառի վերևի նիստի թիվը գույգ չէ»
 - 52 խաղաքարերի միջից պատահականորեն ընտրում ենք 2 քար: $B =$ «երկու քարերը նույն գույնի են և նրանցից մեկը 10 է»:
 $\overline{B} =$ «քարերն ունեն փարբեր գույներ կամ նրանցից ոչ մեկը 10 չէ»:
- A և B պատահույթների միավորում կանվանենք C պատահույթը որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք կամ A -ում են կամ B -ում (հնարավոր է լինեն և A -ում և B -ում): Նշ. $C = A \cup B$:
- Օրինակ՝ թող $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
 $A = \{\text{բոլոր կենար ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega\text{-ն կենար է}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $B = \{\text{բոլոր 3-ի պարիկ ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \equiv 0(\text{mod } 3)\} = \{3, 6, 9\}$
 $C = A \cup B =$ «ելքը կենար է կամ երեքի պարիկ» = $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Գործողությունների պապահույթների հետք

Նախում

- Պապահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շարք օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պապահույթի հակառակ պապահույթը նշանակում ենք \overline{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին:
- A և B պապահույթների միավորում կանվանենք $C = A \cup B$ պապահույթը, որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք կան A -ում են կան B -ում:

Գործողությունների պապահույթների հետ

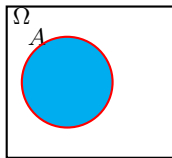
Նախում

- Պապահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շարք օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պապահույթի հակառակ պապահույթը նշանակում ենք \bar{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին:
- A և B պապահույթների միավորում կանվանենք $C = A \cup B$ պապահույթը, որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք կան A -ում են կան B -ում:
- A և B պապահույթների հատում կանվանենք $D = A \cap B$ պապահույթը, որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք և՛ A -ում են, և՛ B -ում:
- Օրինակ՝ թող $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
 $A = \{\text{բոլոր կենար ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega\text{-ն կենար է}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $B = \{\text{բոլոր 3-ի պարիկ ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \equiv 0(\text{mod } 3)\} = \{3, 6, 9\}$
 $D = A \cap B =$

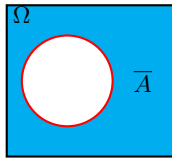
Գործողություններ պարահույթների հետ

Նախում

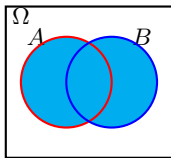
- Պարահույթները պարկերավոր ներկայացնելու համար շար օգտակար է գծել Վենի դիագրամը:
- A պարահույթի հակառակ պարահույթը նշանակում ենք \bar{A} , այն պարունակում է բոլոր այն հնարավոր ելքերը, որոնք չեն պարկանում A -ին:
- A և B պարահույթների միավորում կանվանենք $C = A \cup B$ պարահույթը, որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք կան A -ում են կան B -ում:
- A և B պարահույթների հատում կանվանենք $D = A \cap B$ պարահույթը, որը կազմված է բոլոր այն ելքերից, որոնք և՛ A -ում են, և՛ B -ում:
- Օրինակ՝ թող $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
 $A = \{\text{բոլոր կենար ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega\text{-ն կենար է}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $B = \{\text{բոլոր 3-ի պարիկ ելքերը}\} = \{\omega \in \Omega : \omega \equiv 0(\text{mod } 3)\} = \{3, 6, 9\}$
 $D = A \cap B = \langle \text{ելքը կենար է և երեքի պարիկ} \rangle = \{3, 9\}$.



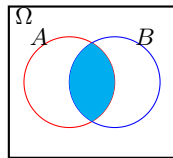
A



\bar{A}



$A \cup B$



$A \cap B$

Պատահույթի հավանականություն

Հավանականությունը որևէ փորձի հնարավոր փարբեր ելքերի պատահելու հնարավորությունն է:

$$P(A) = \frac{\text{բոլոր այն ելքերի քանակը, որոնց դեպքում } A\text{-իրականացված է}}{\text{բոլոր հնարավոր ելքերի քանակ}}$$

$$P(A) = \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{N}(\Omega)}$$

Վարժություն՝ Ճիշտ անվամբ կոչել հետևյալ պատահույթներն ու հաշվել նրանց հավանականությունը՝ նարդու մեկ զառ նետելիս վերին նիստի վրա տեսել ենք
ա) բացասական թիվ, բ) յոթից փոքր թիվ:

Պատահույթի հավանականություն

Հավանականությունը որևէ փորձի հնարավոր փարբեր ելքերի պատահելու հնարավորությունն է:

$P(A) = \frac{\text{բոլոր այն ելքերի քանակը, որոնց դեպքում } A\text{-իրականացված է}}{\text{բոլոր հնարավոր ելքերի քանակ}}$

$$P(A) = \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{N}(\Omega)}$$

Վարժություն՝ Ճիշտ անվամբ կոչել հետևյալ պատահույթներն ու հաշվել նրանց հավանականությունը՝ նարդու մեկ զառ նետելիս վերին նիստի վրա տեսել ենք
ա) բացասական թիվ, բ) յոթից փոքր թիվ:

ա) անհնար պատահույթ, $P(A) = 0$: բ) հավասարի պատահույթ, $P(A) = 1$:

Միշտ պեղի ունի՝

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

Տարրական պատահույթ և անհամադրելի պատահույթներ

Վարժություն՝ ներել ենք երկու զառ, հաշվել հավանականությունը, որ վերևի նիստերի երկու թվերի փարբերությունը (բացարձակ արժեքով) հավասար է 2-ի:

A պատահույթի հավանականություն՝
$$P(A) = \frac{\mathcal{N}(A)}{\mathcal{N}(\Omega)}$$

Մտախ. Մեկ էլքից բաղկացած պատահույթն անվանում ենք տարրական պատահույթ:

$$A = \{\omega\} \implies P(A) = 1/\mathcal{N}(\Omega).$$

Սրացվում է, որ եթե $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, ապա

$$P(A) = 3/\mathcal{N}(\Omega) \text{ և } P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = 3/\mathcal{N}(\Omega):$$

Մտախ. Կասենք, որ A և B պատահույթները անհամադրելի են, եթե նրանք չեն կարող իրականանալ միաժամանակ՝ $A \cap B = \emptyset$:

$$A\text{-ն և } B\text{-ն անհամադրելի են} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B):$$

Վարժություն՝ ներել ենք երկու զառ, հաշվել հավանականությունը, որ վերևի նիստերի երկու թվերի փարբերությունը (բաց. արժեքով) խիստ մեծ է 3-ից:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուփից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\overline{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայրնի է $P(A)$ -ն:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուլից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
- $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուլից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
- 54 խաղաթղթի փուլից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\overline{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայրնի է $P(A)$ -ն:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուփից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 13/54 \approx 24\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
- Օգտագործելով անհամարելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\overline{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայրնի է $P(A)$ -ն:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուփից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 13/54 \approx 24\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
 - $P(A) = (54 - 13)/54 \approx 76\%$:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\bar{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայտնի է $P(A)$ -ն:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուփից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 13/54 \approx 24\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
 - $P(A) = (54 - 13)/54 \approx 76\%$:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\bar{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայտնի է $P(A)$ -ն:
 - $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A})$ քանի որ պատահույթներն անհամարեղելի են:

Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուլից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուլից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 13/54 \approx 24\%$:
- 54 խաղաթղթի փուլից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
 - $P(A) = (54 - 13)/54 \approx 76\%$:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\bar{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայտնի է $P(A)$ -ն:
 - $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A})$ քանի որ պատահույթներն անհամարեղելի են:
 - $A \cup \bar{A} = \Omega \implies P(A \cup \bar{A}) = 1$.

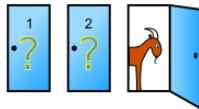
Խնդիր 1՝ հակառակ պատահույթի հավանականություն

- 52 խաղաթղթի փուփից հանում են մեկը և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 1/4 = 25\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել խաչի նշան դուրս գալու հավանականությունը:
 - $P(A) = 13/54 \approx 24\%$:
- 54 խաղաթղթի փուփից, որում կա երկու ջոկեր, հանում են մեկ խաղաթուղթ և գրանցում նշանը (ագռավ, աղյուս, սիրտ, խաչ, ջոկեր): Գտնել հավանականությունը, որ գրանցված նշանը խաչ չէ:
 - $P(A) = (54 - 13)/54 \approx 76\%$:
- Օգտագործելով անհամարեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնը՝ հաշվել $P(\bar{A})$ -ն, ենթադրելով՝ որ հայրնի է $P(A)$ -ն:
 - $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A})$ քանի որ պատահույթներն անհամարեղելի են:
 - $A \cup \bar{A} = \Omega \implies P(A \cup \bar{A}) = 1$.
 - Սրացանք $P(A) + P(\bar{A}) = 1$: Ուրեմն $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$:

Խնդիր 2` Monty Hall

Let's Make a Deal

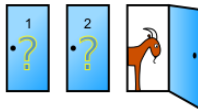
Նեոուսփաշտուում առաջարկվում է երեք դռների ընտրություն.
մեկի հետևում կա մեքենա, մյուսների հետևում՝ այծեր:
Ընտրում եք դուռ, ասենք թիվ 1: Նաղորդավարը, ով գիտի,
թե ինչ կա դռների հետևում, բացում է մեկ այլ դուռ, ասենք
թիվ 3, որի հետևում այծ է, և հարցնում. «Պահում եք
սկզբնական ընտրությունը, թե՛ ցանկանում եք փոխել:



Խնդիր 2` Monty Hall

Let's Make a Deal

Նեռուսփաշոուում առաջարկվում է երեք դռների ընտրություն.
մեկի հետևում կա մեքենա, մյուսների հետևում՝ այծեր:
Ընտրում եք դուռ, ասենք թիվ 1: Նաղորդավարը, ով գիտի,
թե ինչ կա դռների հետևում, բացում է մեկ այլ դուռ, ասենք
թիվ 3, որի հետևում այծ է, և հարցնում. «Պահում եք
սկզբնական ընտրությունը, թե՞ ցանկանում եք փոխել:



Վարուժանն ու Աշխենը որոշում են մասնակցել հաղորդմանը:

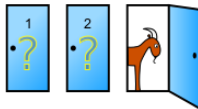
Վարուժանը համոզված է, որ իր առաջին ընտրությունը միշտ ճիշտ է լինում, և ոչ մի դեպքում չի փոխի իր որոշումը:

Աշխենը՝ հակառակը, գտնում է, որ պետք է անպայման փոխել, քանի որ նախորդ հաղորդումների ժամանակ ավելի հաճախ շահել են դուռը փոխողները:

Խնդիր 2` Monty Hall

Let's Make a Deal

Նեռուսփաշոուում առաջարկվում է երեք դռների ընտրություն.
մեկի հետևում կա մեքենա, մյուսների հետևում՝ այծեր:
Ընտրում եք դուռ, ասենք թիվ 1: Նաղորդավարը, ով գիտի,
թե ինչ կա դռների հետևում, բացում է մեկ այլ դուռ, ասենք
թիվ 3, որի հետևում այծ է, և հարցնում. «Պահում եք
սկզբնական ընտրությունը, թե՞ ցանկանում եք փոխել:



Վարուժանն ու Աշխենը որոշում են մասնակցել հաղորդմանը:

Վարուժանը համոզված է, որ իր առաջին ընտրությունը միշտ ճիշտ է լինում, և ոչ մի դեպքում չի փոխի իր որոշումը:

Աշխենը՝ հակառակը, գտնում է, որ պետք է անպայման փոխել, քանի որ նախորդ հաղորդումների ժամանակ ավելի հաճախ շահել են դուռը փոխողները:

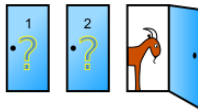
Նշվելի հետևյալ պարահույթների հավանականությունը՝

- A = «Վարուժանը կշահի մեքենա»
- B = «Աշխենը կշահի մեքենա»

Խնդիր 2՝ Monty Hall

Let's Make a Deal

Նեռուսփաշոուում առաջարկվում է երեք դռների ընտրություն.
մեկի հետևում կա մեքենա, մյուսների հետևում՝ այծեր:
Ընտրում եք դուռ, ասենք թիվ 1: Նաղորդավարը, ով գիտի,
թե ինչ կա դռների հետևում, բացում է մեկ այլ դուռ, ասենք
թիվ 3, որի հետևում այծ է, և հարցնում. «Պահում եք
սկզբնական ընտրությունը, թե՞ ցանկանում եք փոխել:



Վարուժանն ու Աշխենը որոշում են մասնակցել հաղորդմանը:

Վարուժանը համոզված է, որ իր առաջին ընտրությունը միշտ ճիշտ է լինում, և
ոչ մի դեպքում չի փոխի իր որոշումը:

Աշխենը՝ հակառակը, գտնում է, որ պետք է անպայման փոխել, քանի որ նախորդ
հաղորդումների ժամանակ ավելի հաճախ շահել են դուռը փոխողները:

Նշվելի հետևյալ պարահույթների հավանականությունը՝

- $A = \text{«Վարուժանը կշահի մեքենա»}$ $P(A) = 1/3$
- $B = \text{«Աշխենը կշահի մեքենա»}$ $P(B) = 2/3$

- ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{6}{64} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} > 90% :$$

ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{6}{64} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} > 90% :$$

բ) 7 ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան ամիսը: Նաշվել հավանականությունը, որ գոնե մեկ ամիս գրված կլինի երկու անգամ:

ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{6}{64} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} > 90% :$$

բ) 7 ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան ամիսը: Նաշվել հավանականությունը, որ գոնե մեկ ամիս գրված կլինի երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{A_{12}^7}{12^7} = 1 - \frac{11 \times 10 \times \dots \times 5}{12^6} \approx 89% :$$

- ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{6}{64} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} > 90% :$$

- բ) 7 ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան ամիսը: Նաշվել հավանականությունը, որ գոնե մեկ ամիս գրված կլինի երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{A_{12}^7}{12^7} = 1 - \frac{11 \times 10 \times \dots \times 5}{12^6} \approx 89% :$$

- գ) Դասարանում կա 40 աշակերտ, որոնցից ոչ ոք չի ծնվել փետրվարի 29-ին: Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն 2 աշակերտ ծնվել են նույն օրը:

- ա) Չորս ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան եղանակը (գարուն, ամառ, աշուն, ձմեռ): Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն մեկ եղանակ գրված կլինի առնվազն երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{6}{64} = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} > 90% :$$

- բ) 7 ընկեր թղթի վրա գրում են իրենց ծննդյան ամիսը: Նաշվել հավանականությունը, որ գոնե մեկ ամիս գրված կլինի երկու անգամ:

$$P(A) = 1 - \frac{A_{12}^7}{12^7} = 1 - \frac{11 \times 10 \times \dots \times 5}{12^6} \approx 89% :$$

- գ) Դասարանում կա 40 աշակերտ, որոնցից ոչ ոք չի ծնվել փետրվարի 29-ին: Նաշվել հավանականությունը, որ առնվազն 2 աշակերտ ծնվել են նույն օրը:

$$P(A) = 1 - \frac{A_{365}^{40}}{365^{40}} = 1 - \frac{365!}{(365 - 40)! 365^{40}} \approx 89% :$$