Հավանականությունների տեսություն և վիճակագրություն

Դաս 3

Ապրիլ 10, 2024

Առնակ Դալալյան

ENSAE Paris / CREST

Պատահական մեծություններ

Սահմանում

- Ω-ն պատահական փորձի արդյունքում ստացված նմուշների տարածությունն է:
- Պատահական մեծությունը Ω-ի վրա որոշված ֆունկցիա է, որի պատկերը $\mathbb{R}$-ի ենթաբազմություն է:
- Պատահական մեծությունները նշանակում ենք լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ X, Y, Z:
- X պատահական մեծությունը կոչվում է դիսկրետ, եթե X ֆունկցիայի պատկերը բաղկացած է վերջավոր /կամ հաշվելի/ թվով տարրերից:
- Դիսկրետ պատահական մեծության կարևոր օրինակներ են այն պատահական մեծությունները, որոնց արժեքները դրական ամբողջ թվեր են:
    - Օրինակ՝ դասարանում պատահականորեն ընտրել ենք մի աշակերտի և նշել նրա անվան տառերի քանակը:
    - $\Omega =$ դասարանի աշակերտների բազմությունը:
    - $\omega_1 =$ առաջին աշակերտ, որի անունը Արմեն է, $X(\omega_1) = 5$,
      $\omega_2 =$ 2-րդ աշակերտ, որի անունը Կարինե է, $X(\omega_2) = 6$,
      $\ldots$
    - $X(\Omega) \subset \{3, 4, \ldots, 20\}$:
- Եթե Ω-ն վերջավոր է, ապա X-ը պարտադիր դիսկրետ է:

- Նետում ենք երկու միմյանցից անկախ քառանիստ զառ, որոնց նիստերին գրված են 1-ից 4 թվերը:
- Մեզ հետաքրքրող պատահական մեծությունը ստացված երկու արդյունքների տարբերության բացարձակ արժեքն է:

Ω				X			
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	0	1	2	3
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	1	0	1	2
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	2	1	0	1
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	3	2	1	0

- X պատ. մեծ.-ը դիսկրետ է, քանի որ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ վերջավոր է:
- Կարող ենք հաշվել $A_0 = \{X = 0\}$, $A_1 = \{X = 1\}$, $A_2 = \{X = 2\}$, $A_3 = \{X = 3\}$ պատահույթների հավանականությունները՝

- Նետում ենք երկու միմյանցից անկախ քառանիստ զառ, որոնց նիստերին գրված են 1-ից 4 թվերը:
- Մեզ հետաքրքրող պատահական մեծությունը ստացված երկու արդյունքների տարբերության բացարձակ արժեքն է:

Ω				X			
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	0	1	2	3
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	1	0	1	2
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	2	1	0	1
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	3	2	1	0

- X պատ. մեծ.-ը դիսկրետ է, քանի որ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ վերջավոր է:
- Կարող ենք հաշվել $A_0 = \{X = 0\}$, $A_1 = \{X = 1\}$, $A_2 = \{X = 2\}$, $A_3 = \{X = 3\}$ պատահույթների հավանականությունները՝

$$\boxed{P(A_0) = \tfrac{1}{4},\ P(A_1) = \tfrac{3}{8},\ P(A_2) = \tfrac{1}{4},\ P(A_3) = \tfrac{1}{8}}$$

- Ստացված հավանականությունները ներկայացնենք աղյուսակով՝

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/4	3/8	1/4	1/8

Հավանականության ֆունկցիա և բաշխման օրենք

- Փոքրատառ x, y, z տառերով նշանակում ենք պատ. մեծության ընդունած (հնարավոր) արժեքները:
- $p(x) = P(X = x)$ ֆունկցիան անվանում ենք հավանականության ֆունկցիա: Նրա որոշման տիրույթը պատ. մեծության պատկերն է: Այսինքն, եթե $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ապա հավանականության ֆունկցիան որոշված է $x_1, \ldots, x_n$ կետերում:
- X դիսկրետ պատ. մեծության բաշխման օրենք ասելով հասկանում ենք հավանականությունների ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը:

- Նետում ենք երկու միմյանցից անկախ քառանիստ զառ, որոնց նիստերին գրված են 1-ից 4 թվերը:
- X-ը ստացված երկու արդյունքների տարբերության բացարձակ արժեքն է: Այն դիսկրետ է, քանի որ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ վերջավոր է:

Հավանականության ֆունկցիա և բաշխման օրենք

- Փոքրատառ x, y, z տառերով նշանակում ենք պատ. մեծության ընդունած (հնարավոր) արժեքները:
- $p(x) = P(X = x)$ ֆունկցիան անվանում ենք հավանականության ֆունկցիա: Նրա որոշման տիրույթը պատ. մեծության պատկերն է: Այսինքն, եթե $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ապա հավանականության ֆունկցիան որոշված է $x_1, \ldots, x_n$ կետերում:
- X դիսկրետ պատ. մեծության բաշխման օրենք ասելով հասկանում ենք հավանականությունների ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը:

- Նետում ենք երկու միմյանցից անկախ քառանիստ զառ, որոնց նիստերին գրված են 1-ից 4 թվերը:
- X-ը ստացված երկու արդյունքների տարբերության բացարձակ արժեքն է: Այն դիսկրետ է, քանի որ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ վերջավոր է:
- Հավանականության ֆունկցիա՝

$$p(0) = 1/4, \quad p(1) = 3/8, \quad p(2) = 1/4, \quad p(3) = 1/8 :$$

Հավանականության ֆունկցիա և բաշխման օրենք

- Փոքրատառ x, y, z տառերով նշանակում ենք պատ. մեծության ընդունած (հնարավոր) արժեքները:
- $p(x) = P(X = x)$ ֆունկցիան անվանում ենք հավանականության ֆունկցիա: Նրա որոշման տիրույթը պատ. մեծության պատկերն է: Այսինքն, եթե $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ապա հավանականության ֆունկցիան որոշված է $x_1, \ldots, x_n$ կետերում:
- X դիսկրետ պատ. մեծության բաշխման օրենք ասելով հասկանում ենք հավանականությունների ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը:

- Նետում ենք երկու միմյանցից անկախ քառանիստ զառ, որոնց նիստերին գրված են 1-ից 4 թվերը:
- X-ը ստացված երկու արդյունքների տարբերության բացարձակ արժեքն է: Այն դիսկրետ է, քանի որ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ վերջավոր է:
- X-ի բաշխման օրենքն է՝

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/4	3/8	1/4	1/8

Պայուսակում կա 4 սկավառակ, որոնցից 2-ի վրա գրված է 2 թիվը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում դրա վրա գրված թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը: X պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:

1) Գրե՛ք նմուշների տարածությունը:
2) Գրե՛ք X-ի պատկերը: Հիմնավորե՛ք, որ X-ը դիսկրետ է:
3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

Պայուսակում կա 4 սկավառակ, որոնցից 2-ի վրա գրված է 2 թիվը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում դրա վրա գրված թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը: X պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:

1) Գրե՛ք նմուշների փարածությունը:
2) Գրե՛ք X-ի պատկերը: Հիմնավորե՛ք, որ X-ը դիսկրետ է:
3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

---

1) $\Omega = \{(2,2);(2;3);(3,2);(3,3)\}$:

Հավանականության ֆունկցիա և բաշխման օրենք

Վարժություն 1

Պայուսակում կա 4 սկավառակ, որոնցից 2-ի վրա գրված է 2 թիվը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում դրա վրա գրված թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը: X պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:

1) Գրե՛ք նմուշների տարածությունը:
2) Գրե՛ք X-ի պատկերը: Հիմնավորե՛ք, որ X-ը դիսկրետ է:
3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

---

1) $\Omega = \{(2,2);(2;3);(3,2);(3,3)\}$:
2) $X(\Omega) = \{4;5;6\}$ վերջավոր է, հետևաբար X-ը դիսկրետ է:

Պայուսակում կա 4 սկավառակ, որոնցից 2-ի վրա գրված է 2 թիվը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում դրա վրա գրված թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը: X պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:

1) Գրե՛ք նմուշների տարածությունը:
2) Գրե՛ք X-ի պատկերը: Հիմնավորե՛ք, որ X-ը դիսկրետ է:
3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

---

1) $\Omega = \{(2,2);(2;3);(3,2);(3,3)\}$:
2) $X(\Omega) = \{4;5;6\}$ վերջավոր է, հետևաբար X-ը դիսկրետ է:
3) X-ի բաշխման օրենքն է՝

x	4	5	6
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

Հավանականության ֆունկցիա և բաշխման օրենք

Վարժություն 2

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X=x)=\begin{cases} kx, & x=1,3 \\ k(x-1), & x=2,4, \end{cases}$$

որտեղ k-ն հաստատուն է:

1) Գտե՛ք k-ն:
2) Աղյուսակով ներկայացրե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X=x)=\begin{cases} kx, & x=1,3 \\ k(x-1), & x=2,4, \end{cases}$$

որտեղ k-ն հաստատուն է:

1) Գտե՛ք k-ն:
2) Աղյուսակով ներկայացրե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

---

1) $X(\Omega)=\{1,2,3,4\}, \quad p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1:$
   Հետևաբար՝ $k+k+3k+3k=1:$
   Ստանում ենք՝ $8k=1:$ Ուրեմն $k=1/8:$

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X=x)=\begin{cases} kx, & x=1,3 \\ k(x-1), & x=2,4, \end{cases}$$

որտեղ k-ն հաստատուն է:

1) Գտե՛ք k-ն:
2) Աղյուսակով ներկայացրե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

---

1) $X(\Omega)=\{1,2,3,4\}, \quad p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$:
   Հետևաբար՝ $k+k+3k+3k=1$:
   Ստանում ենք՝ $8k=1$: Ուրեմն $k=1/8$:
2) X-ի բաշխման օրենքն է՝

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	1/8	1/8	3/8	3/8

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

1) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X<3$:
2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X>3$:
3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $1<X<4$:

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

1) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X < 3$:
2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X > 3$:
3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $1 < X < 4$:

---

1) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ
$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5$:

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

1) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X < 3$:
2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X > 3$:
3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $1 < X < 4$:

---

1) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ
$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5$:
2) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2$:

X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

1) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X < 3$:
2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X > 3$:
3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ $1 < X < 4$:

---

1) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ
$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5$:

2) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2$:

2) անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման կանոնից հետևում է, որ $P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,6$:

Պատահական մեծության մաթ. սպասում

- Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նրա միջին արժեքն է:
- Եթե դրամապանակում կա չորս թղթադրամ՝ 10$, 20$, 50$ և 100$; Հավասար հնարավորությամբ հանում ենք մեկ թղթադրամ և X-ով նշանակում նրա արժեքը: Միջին արժեքը կլինի 45$:
- $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$:
- Օրինակ՝ X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

- Նույն խաղը կամ փորձը բազմիցս կրկնելու դեպքում արդյունքների միջին թվաբանականը կկենտրոնանա $E(X)$ արժեքի շուրջ:

Պատահական մեծության մաթ. սպասում

- Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նրա միջին արժեքն է:
- Եթե դրամապանակում կա չորս թղթադրամ՝ 10$, 20$, 50$ և 100$; Հավասար հնարավորությամբ հանում ենք մեկ թղթադրամ և X-ով նշանակում նրա արժեքը: Միջին արժեքը կլինի 45$:
- $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$:
- Օրինակ՝ X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

- $E(X) = 0,25 \times (-400) + 0,5 \times 300 + 0,25 \times 1000 = 300$:
- Նույն խաղը կամ փորձը բազմիցս կրկնելու դեպքում արդյունքների միջին թվաբանականը կկենտրոնանա $E(X)$ արժեքի շուրջ:

- Կարևոր է նաև իմանալ, թե որքանով են տարբեր պատահական մեծության արժեքները մոտ մաթեմատիկական սպասմանը:
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$: Կարևոր է շեշտել, որ քառակուսու մաթ-սպասումը հավասար չէ՝ ընդհանուր դեպքում, մաթ-սպասման քառակուսուն: Հետևաբար դիսպերսիան զրո չէ: Այն զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ պատահական մեծությունը մեկ հավանականությամբ հավասար է հաստատունի:
- $E(X^2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2$:
- Դիսպերսիայից քառակուսի արմատ հանելով՝ ստանում ենք ստանդարտ շեղումը, $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$:
- վերջինս արտահայտում է մաթեմատիկական սպասումից պատահական մեծության ունեցած ցրվածությունը:
- X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

- Կարևոր է նաև իմանալ, թե որքանով են փարբեր պատահական մեծության արժեքները մոտ մաթեմատիկական սպասմանը:
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$: Կարևոր է շեշտել, որ քառակուսու մաթ-սպասումը հավասար չէ՝ ընդհանուր դեպքում, մաթ-սպասման քառակուսուն: Հետևաբար դիսպերսիան զրո չէ: Այն զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ պատահական մեծությունը մեկ հավանականությամբ հավասար է հաստատունի:
- $E(X^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2$:
- Դիսպերսիայից քառակուսի արմատ հանելով՝ ստանում ենք ստանդարտ շեղումը, $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$:
- վերջինս արտահայտում է մաթեմատիկական սպասումից պատահական մեծության ունեցած ցրվածությունը:
- X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

- $E(X) = 300$ (տե՛ս նախորդ էջ):

- Կարևոր է նաև իմանալ, թե որքանով են տարբեր պատահական մեծության արժեքները մոտ մաթեմատիկական սպասմանը:
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$: Կարևոր է շեշտել, որ քառակուսու մաթ-սպասումը հավասար չէ՝ ընդհանուր դեպքում, մաթ-սպասման քառակուսուն: Հետևաբար դիսպերսիան զրո չէ: Այն զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ պատահական մեծությունը մեկ հավանականությամբ հավասար է հաստատունի:
- $E(X^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2$:
- Դիսպերսիայից քառակուսի արմատ հանելով՝ ստանում ենք ստանդարտ շեղումը, $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$:
- վերջինս արտահայտում է մաթեմատիկական սպասումից պատահական մեծության ունեցած ցրվածությունը:
- X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X=x)$	0,25	0,5	0,25

- $E(X) = 300$ (տե՛ս նախորդ էջ):
- $E(X^2) = 0,25 \times (-400)^2 + 0.5 \times 300^2 + 0.25 \times 1000^2 = 335000$:

- Կարևոր է նաև իմանալ, թե որքանով են տարբեր պատահական մեծության արժեքները մոտ մաթեմատիկական սպասմանը:
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$: Կարևոր է շեշտել, որ քառակուսու մաթ-սպասումը հավասար չէ՝ ընդհանուր դեպքում, մաթ-սպասման քառակուսուն: Հետևաբար դիսպերսիան զրո չէ: Այն զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ պատահական մեծությունը մեկ հավանականությամբ հավասար է հաստատունի:
- $E(X^2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2$:
- Դիսպերսիայից քառակուսի արմատ հանելով՝ ստանում ենք ստանդարտ շեղումը, $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$:
- վերջինս արտահայտում է մաթեմատիկական սպասումից պատահական մեծության ունեցած ցրվածությունը:
- X-ը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

x	-400	300	1000
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

- $E(X) = 300$ (տե՛ս նախորդ էջ):
- $E(X^2) = 0,25 \times (-400)^2 + 0.5 \times 300^2 + 0.25 \times 1000^2 = 335000$: $\sigma \approx 495$:

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն հանում ենք երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի դուրս գալու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի դեպքում՝ կորցնում ենք 100 դրամ: Հանած երկու գնդակների մեջ կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը նշանակված է X-ով: Իսկ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

- Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները:
- Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները:
- Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:
- Գտե՛ք $E(Y)$:
- Գտե՛ք $Var(Y)$, հետո Y-ի ստանդարտ շեղումը:

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն հանում ենք երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի դուրս գալու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի դեպքում՝ կորցնում ենք 100 դրամ: Հանած երկու գնդակների մեջ կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը նշանակված է X-ով: Իսկ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

- Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները:
- Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:
- Գտե՛ք $E(Y)$:
- Գտե՛ք $Var(Y)$, հետո Y-ի ստանդարտ շեղումը:

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն հանում ենք երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի դուրս գալու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի դեպքում՝ կորցնում ենք 100 դրամ: Հանած երկու գնդակների մեջ կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը նշանակված է X-ով: Իսկ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

- Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները: $Y(\Omega) = \{-200, 200, 600\}$
- Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:
- Գտե՛ք $E(Y)$:
- Գտե՛ք $Var(Y)$, հետո Y-ի ստանդարտ շեղումը:

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն հանում ենք երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի դուրս գալու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի դեպքում՝ կորցնում ենք 100 դրամ: Հանած երկու գնդակների մեջ կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը նշանակված է X-ով: Իսկ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

- Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները: $Y(\Omega) = \{-200, 200, 600\}$
- Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:

x	-200	200	600
$P(Y = x)$	4/9	4/9	1/9

- Գտե՛ք $E(Y)$:
- Գտե՛ք $Var(Y)$, հետո Y-ի ստանդարտ շեղումը:

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն հանում ենք երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի դուրս գալու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի դեպքում՝ կորցնում ենք 100 դրամ: Հանած երկու գնդակների մեջ կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը նշանակված է X-ով: Իսկ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

- Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները: $Y(\Omega) = \{-200, 200, 600\}$
- Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:

x	-200	200	600
$P(Y = x)$	$4/9$	$4/9$	$1/9$

- Գտե՛ք $E(Y)$: $E(Y) = \frac{4}{9} \times (-200) + \frac{4}{9} \times 200 + \frac{1}{9} \times 600 = 200/3 \approx 66,7$
- Գտե՛ք $Var(Y)$, հետո Y-ի ստանդարտ շեղումը:

$E(Y^2) = \frac{4}{9} \times (-200)^2 + \frac{4}{9} \times 200^2 + \frac{1}{9} \times 600^2 = 680\,000/9$:

$Var(Y) = \frac{680\,000}{9} - (\frac{200}{3})^2 = \frac{640\,000}{9}$; $\sigma = 800/3 \approx 266,7$:

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝ օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:
- $$\begin{aligned} P(X=200) = {} & P(1\text{ինը չի եկել, }2\text{րդը եկել է},\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը չի եկել},\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \ldots + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը եկել է},\ldots,201\text{րդը չի եկել}) \\ = {} & 201 \times 0.01 \times (0.99)^{200} \end{aligned}$$

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:
- $$\begin{aligned} P(X=200) = {} & P(1\text{ինը չի եկել, }2\text{րդը եկել է,}\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը չի եկել,}\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \ldots + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը եկել է,}\ldots,201\text{րդը չի եկել}) \\ = {} & 201 \times 0.01 \times (0.99)^{200} \end{aligned}$$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 1 ուղևոր:

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:
- $$\begin{aligned} P(X=200) = {} & P(1\text{ինը չի եկել, }2\text{րդը եկել է,}\ldots, 201\text{րդը եկել է}) + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը չի եկել,}\ldots, 201\text{րդը եկել է}) + \ldots + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը եկել է,}\ldots, 201\text{րդը չի եկել}) \\ = {} & 201 \times 0.01 \times (0.99)^{200} \end{aligned}$$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 1 ուղևոր: $P(X=1) = 201 \times 0.99 \times (0.01)^{200}$

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:
- $$\begin{aligned} P(X=200) = {} & P(1\text{ինը չի եկել, }2\text{րդը եկել է}, \ldots, 201\text{րդը եկել է}) + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը չի եկել}, \ldots, 201\text{րդը եկել է}) + \ldots + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը եկել է}, \ldots, 201\text{րդը չի եկել}) \\ = {} & 201 \times 0.01 \times (0.99)^{200} \end{aligned}$$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 1 ուղևոր: $P(X=1) = 201 \times 0.99 \times (0.01)^{200}$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 199 ուղևոր:

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն՝օրինակ

Երևան Փարիզ մեկ թռիչքի համար վաճառվել է 201 տոմս: X-ով նշանակում ենք պատահական մեծությունը, որը ցույց է տալիս տոմս առած 201 ուղևորներից քանիսն են ներկայացել օդանավակայան: Ամեն ուղևորի օդանավակայան ներկայանալու հավանականությունը 0.99 է: Համարում ենք, որ տարբեր ուղևորների օդանավակայան ներկայանալու պատահույթներն անկախ են:

Ինքնաթիռում կա 200 նստատեղ:

- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել ուղիղ 200 ուղևոր:
- $$\begin{aligned} P(X=200) = {} & P(1\text{ինը չի եկել, }2\text{րդը եկել է,}\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը չի եկել,}\ldots,201\text{րդը եկել է}) + \ldots + \\ & P(1\text{ինը եկել է, }2\text{րդը եկել է,}\ldots,201\text{րդը չի եկել}) \\ = {} & 201 \times 0.01 \times (0.99)^{200} \end{aligned}$$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 1 ուղևոր: $P(X=1) = 201 \times 0.99 \times (0.01)^{200}$
- Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ օդանավակայան է ներկայացել 199 ուղևոր: $P(X=199) = \frac{201\times 200}{2} \times (0.01)^2 \times (0.99)^{199}$

Երկանդամային (բինոմիալ) բաշխում ունեցող պատահական մեծություն

- Ենթադրենք մի փորձում հաջողության հասնելու հավանականությունը p է: Բնականաբար $p \in [0, 1]$:
- Ենթադրենք նույն փորձը կրկնել ենք n անգամ, միմյանցից անկախ պայմաններում:
- X-ով նշանակենք n փորձում գրանցված հաջողությունների քանակը:
- Ակնհայտ է, որ X-ի հնարավոր արժեքներն են՝ $0, 1, \ldots, n$:
- Կարելի է ապացուցել, որ

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} :$$

- Ասում ենք, որ X-ը ունի երկանդամային բաշխում (n, p) պարամետրերով: $\underbrace{\text{Գրում ենք } X \sim \mathcal{B}(n, p)}_{\text{սա երևի աշակերտներին պետք չի ասել}}$:
- Հայտնի է, որ $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

- Նշանակենք X-ով $n = 500$ փորձի արդյունքում քանի անգամ է բացվել 3 թիվը:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

- Նշանակենք X-ով $n = 500$ փորձի արդյունքում քանի անգամ է բացվել 3 թիվը:
- Մեկ փորձից հետո 3-ի բացվելու հավանականությունն է՝ $p = 1/5$:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պրուրակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պրուրակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվեք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

- Նշանակենք X-ով $n = 500$ փորձի արդյունքում քանի անգամ է բացվել 3 թիվը:
- Մեկ փորձից հետո 3-ի բացվելու հավանականությունն է՝ $p = 1/5$:
- Հետևաբար X-ն ունի երկանդամային բաշխում՝ (n, p) պարամետրերով:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

- Նշանակենք X-ով $n = 500$ փորձի արդյունքում քանի անգամ է բացվել 3 թիվը:
- Մեկ փորձից հետո 3-ի բացվելու հավանականությունն է՝ $p = 1/5$:
- Հետևաբար X-ն ունի երկանդամային բաշխում՝ (n, p) պարամետրերով:
- Ուրեմն $E(X) = np = 100$:

Հինգ նիստ ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

- Նշանակենք X-ով $n = 500$ փորձի արդյունքում քանի անգամ է բացվել 3 թիվը:
- Մեկ փորձից հետո 3-ի բացվելու հավանականությունն է՝ $p = 1/5$:
- Հետևաբար X-ն ունի երկանդամային բաշխում՝ (n, p) պարամետրերով:
- Ուրեմն $E(X) = np = 100$:
- Եզրակացնում ենք, որ միջինում 3 թիվը կբացվի 100 անգամ:

Աշակերտը փնից հեծանվով գնում է դպրոց՝ անցնելով 3կմ ճանապարհ, 15 կմ/ժ արագությամբ: Ճանապարհին կա 3 լուսացույց, որոնց կանաչ լինելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, և որոնք միմյանցից անկախ են: Կարմիր կամ դեղին լույսերի հանդիպելիս աշակերտը կորցնում է 1,5 րոպե: X-ը համապատասխանում է փնից դպրոց ճանապարհին կանաչ լույսերի քանակին: Նշանակում ենք T-ով նույն ճանապարհը անցնելու ժամանակը:

- Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:
- Արտահայտել T-ն X-ի միջոցով: Հաշվել $E(T)$-ն և մեկնաբանել:
- Դասերը սկսվում են 8:30: Աշակերտը փնից դուրս է գալիս 8:16: Հաշվել հավանականությունը, որ աշակերտը չի ուշանա:

Աշակերտը փնից հեծանվով գնում է դպրոց՝ անցնելով 3կմ ճանապարհ, 15 կմ/ժ արագությամբ: Ճանապարհին կա 3 լուսացույց, որոնց կանաչ լինելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, և որոնք միմյանցից անկախ են: Կարմիր կամ դեղին լույսերի հանդիպելիս աշակերտը կորցնում է 1,5 րոպե: X-ը համապատասխանում է փնից դպրոց ճանապարհին կանաչ լույսերի քանակին: Նշանակում ենք T-ով նույն ճանապարհը անցնելու ժամանակը:

- Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:
- Արտահայտել T-ն X-ի միջոցով: Հաշվել $E(T)$-ն և մեկնաբանել:
- Դասերը սկսվում են 8:30: Աշակերտը փնից դուրս է գալիս 8:16: Հաշվել հավանականությունը, որ աշակերտը չի ուշանա:

- X ունի $n = 3$ և $p = \frac{2}{3}$ պարամետրերով երկանդամային բաշխում:

Երկանդամային (բինոմիալ) պատահական մեծություն

Խնդիր 2

Աշակերտը տնից հեծանիվով գնում է դպրոց՝ անցնելով 3կմ ճանապարհ, 15 կմ/ժ արագությամբ: Ճանապարհին կա 3 լուսացույց, որոնց կանաչ լինելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, և որոնք միմյանցից անկախ են: Կարմիր կամ դեղին լույսերի հանդիպելիս աշակերտը կորցնում է 1,5 րոպե: X-ը համապատասխանում է տնից դպրոց ճանապարհին կանաչ լույսերի քանակին: Նշանակում ենք T-ով նույն ճանապարհը անցնելու ժամանակը:

- Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:
- Արտահայտել T-ն X-ի միջոցով: Հաշվել $E(T)$-ն և մեկնաբանել:
- Դասերը սկսվում են 8:30: Աշակերտը տնից դուրս է գալիս 8:16: Հաշվել հավանականությունը, որ աշակերտը չի ուշանա:

- X ունի $n = 3$ և $p = \frac{2}{3}$ պարամետրերով երկանդամային բաշխում:
- $T = (3/15) \times 60 + 1.5(3 - X) = 16.5 - 1.5X$:

Աշակերտը տնից հեծանիվով գնում է դպրոց՝ անցնելով 3կմ ճանապարհ, 15 կմ/ժ արագությամբ: Ճանապարհին կա 3 լուսացույց, որոնց կանաչ լինելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, և որոնք միմյանցից անկախ են: Կարմիր կամ դեղին լույսերի հանդիպելիս աշակերտը կորցնում է 1,5 րոպե: X-ը համապատասխանում է տնից դպրոց ճանապարհին կանաչ լույսերի քանակին: Նշանակում ենք T-ով նույն ճանապարհը անցնելու ժամանակը:

- Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:
- Արտահայտել T-ն X-ի միջոցով: Հաշվել $E(T)$-ն և մեկնաբանել:
- Դասերը սկսվում են 8:30: Աշակերտը տնից դուրս է գալիս 8:16: Հաշվել հավանականությունը, որ աշակերտը չի ուշանա:

- X ունի $n = 3$ և $p = \frac{2}{3}$ պարամետրերով երկանդամային բաշխում:
- $T = (3/15) \times 60 + 1.5(3 - X) = 16.5 - 1.5X$:

x	12	13.5	15	16.5
$P(T = x)$	$(\frac{2}{3})^3$	$3(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}$	$3(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{1}{3})^3$

- $E(T) = \frac{8}{27} \times 12 + \frac{4}{9} \times 13.5 + \frac{2}{9} \times 15 + \frac{1}{27} \times 16.5 = 13.5$:

Աշակերտը տնից հեծանվով գնում է դպրոց՝ անցնելով 3կմ ճանապարհ, 15 կմ/ժ արագությամբ: Ճանապարհին կա 3 լուսացույց, որոնց կանաչ լինելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, և որոնք միմյանցից անկախ են: Կարմիր կամ դեղին լույսերի հանդիպելիս աշակերտը կորցնում է 1,5 րոպե: X-ը համապատասխանում է տնից դպրոց ճանապարհին կանաչ լույսերի քանակին: Նշանակում ենք T-ով նույն ճանապարհը անցնելու ժամանակը:

- Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:
- Արտահայտել T-ն X-ի միջոցով: Հաշվել $E(T)$-ն և մեկնաբանել:
- Դասերը սկսվում են 8:30: Աշակերտը տնից դուրս է գալիս 8:16: Հաշվել հավանականությունը, որ աշակերտը չի ուշանա:

- X ունի $n = 3$ և $p = \frac{2}{3}$ պարամետրերով երկանդամային բաշխում:
- $T = (3/15) \times 60 + 1.5(3 - X) = 16.5 - 1.5X$:

x	12	13.5	15	16.5
$P(T = x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

- $E(T) = \frac{8}{27} \times 12 + \frac{4}{9} \times 13.5 + \frac{2}{9} \times 15 + \frac{1}{27} \times 16.5 = 13.5$:
- $P(T \leqslant 14) = 20/27 \approx 74\%$: