Հավանականությունների տեսություն և վիճակագրություն
Դաս 4

Ապրիլ 16, 2024

Առնակ Դալալյան

ENSAE Paris / CREST

X-ի գծային ֆունկցիայի մաթ. սպասում

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է և f-ը ինչ-որ ֆունկցիա է, ապա $Y = f(X)$-ը ևս պատահական մեծություն է:
- Y-ի հնարավոր արժեքների բազմությունը՝ $Y(\Omega) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$:
- Եթե X-ի բաշխման օրենքն է

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

ապա Y-ի բաշխման օրենքը կլինի

X-ի գծային ֆունկցիայի մաթ. սպասում

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է և f-ը ինչ-որ ֆունկցիա է, ապա $Y = f(X)$-ը ևս պատահական մեծություն է:
- Y-ի հնարավոր արժեքների բազմությունը՝ $Y(\Omega) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$:
- Եթե X-ի բաշխման օրենքն է

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

ապա Y-ի բաշխման օրենքը կլինի

y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$
$P(Y = y)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

X-ի գծային ֆունկցիայի մաթ. սպասում

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է և f-ը ինչ-որ ֆունկցիա է, ապա $Y = f(X)$-ը ևս պատահական մեծություն է:
- Y-ի հնարավոր արժեքների բազմությունը՝ $Y(\Omega) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$:
- Եթե X-ի բաշխման օրենքն է

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

ապա Y-ի բաշխման օրենքը կլինի

y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$
$P(Y = y)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

- Հետևաբար, $E(Y) = p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)$.
- Մասնավորապես, եթե f-ը գծային ֆունկցիա է, $f(x) = ax + b$, կստանանք՝

X-ի գծային ֆունկցիայի մաթ. սպասում

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է և f-ը ինչ-որ ֆունկցիա է, ապա $Y = f(X)$-ը ևս պատահական մեծություն է:
- Y-ի հնարավոր արժեքների բազմությունը՝ $Y(\Omega) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$:
- Եթե X-ի բաշխման օրենքն է

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

ապա Y-ի բաշխման օրենքը կլինի

y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$
$P(Y = y)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

- Հետևաբար, $E(Y) = p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)$.
- Մասնավորապես, եթե f-ը գծային ֆունկցիա է, $f(x) = ax + b$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} E(Y) &= p_1(ax_1 + b) + \ldots p_n(ax_n + b) \\ &= p_1 ax_1 + \ldots + p_n ax_n + (p_1 + \ldots + p_n)b \\ &= a(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n) + b = aE(X) + b \end{aligned}$$

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$$

X-ի գծային ֆունկցիայի դիսպերսիա

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$:
- Համարժեք սահմանում՝ $Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$:
- Ենթադրենք $Y = f(X) = aX + b$, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են: Ինչի՞ է հավասար Y-ի դիսպերսիան:

X-ի գծային ֆունկցիայի դիսպերսիա

- Եթե X-ը պատահական մեծություն է
- Դիսպերսիա՝ $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$:
- Համարժեք սահմանում՝ $Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$:
- Ենթադրենք $Y = f(X) = aX + b$, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են: Ինչի՞ է հավասար Y-ի դիսպերսիան:
- Ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= E\big(Y - E(Y)\big)^2 \\
&= E\big(aX + b - E(aX + b)\big)^2 \\
&= E\big(aX + b - aE(X) - b\big)^2 \\
&= a^2 E\big(X - E(X)\big)^2 = a^2 \mathrm{Var}(X).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)}$$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$
4. $E(X^2)$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$ $E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$
4. $E(X^2)$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$ $\qquad E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$ $\qquad \mathrm{Var}(4X - 5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$
4. $E(X^2)$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$ $\quad$ $E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(4X - 5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(-0.1X + 1) = 0.1^2\mathrm{Var}(X) = 0.03$:
4. $E(X^2)$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$ $\quad$ $E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(4X - 5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(-0.1X + 1) = 0.1^2\mathrm{Var}(X) = 0.03$:
4. $E(X^2)$ $\quad$ $E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 = 19$:

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X-2)$ $\quad$ $E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X-5)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(4X-5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X+1)$ $\quad$ $\mathrm{Var}(-0.1X+1) = 0.1^2\mathrm{Var}(X) = 0.03$:
4. $E(X^2)$ $\quad$ $E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 = 19$:

Վարժ. 2 Y պատահական մեծության մաթ.-սպասումը 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 8: Գտնել.

1. $E(12-3Y)$
2. $\mathrm{Var}(12-3Y)$

Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X - 2)$ $\quad E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X - 5)$ $\quad \mathrm{Var}(4X - 5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X + 1)$ $\quad \mathrm{Var}(-0.1X + 1) = 0.1^2\mathrm{Var}(X) = 0.03$:
4. $E(X^2)$ $\quad E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 = 19$:

Վարժ. 2 Y պատահական մեծության մաթ.-սպասումը 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 8: Գտնել.

1. $E(12 - 3Y)$ $\quad E(12 - 3Y) = E((-3)Y + 12) = (-3) \times 3 + 12 = 3$:
2. $\mathrm{Var}(12 - 3Y)$

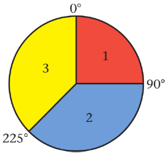
Վարժ. 1 X պատահական մեծության համար $E(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3$: Գտնել.

1. $E(3X-2)$ $\qquad E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 10$:
2. $\mathrm{Var}(4X-5)$ $\qquad \mathrm{Var}(4X-5) = 16\mathrm{Var}(X) = 48$:
3. $\mathrm{Var}(-0.1X+1)$ $\qquad \mathrm{Var}(-0.1X+1) = 0.1^2\mathrm{Var}(X) = 0.03$:
4. $E(X^2)$ $\qquad E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 = 19$:

Վարժ. 2 Y պատահական մեծության մաթ.-սպասումը 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 8: Գտնել.

1. $E(12-3Y)$ $\qquad E(12-3Y) = E((-3)Y + 12) = (-3) \times 3 + 12 = 3$:
2. $\mathrm{Var}(12-3Y)$ $\qquad \mathrm{Var}(12-3Y) = \mathrm{Var}((-3)Y) = 9 \times 8 = 72$:

Չկեղծված պտուտակը պտտրասպված է դիագրամում պատկերված սլավառակից, իսկ X պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:

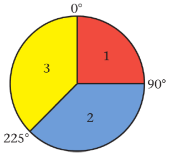


1. Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:

2. Հաշվել $E(2X+1)$-ը:

3. Հաշվել $\mathrm{Var}(3X-1)$-ը:

Չկեղծված պտուտակը պտտրասպված է դիագրամում պատկերված սկավառակից, իսկ X պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:



1. Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:

   $P(X = 1) = 1/4$,
   $P(X = 2) = (1 - 1/4)/2 = 3/8$,
   $P(X = 3) = (1 - 1/4)/2 = 3/8$

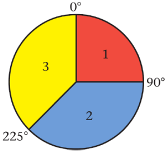
2. Հաշվել $E(2X + 1)$-ը:

3. Հաշվել $\mathrm{Var}(3X - 1)$-ը:

Չկեղծված պտուտակը պտտրասպված է դիագրամում պատկերված սկավառակից, իսկ X պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:

1. Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:

   $P(X = 1) = 1/4,$
   $P(X = 2) = (1 - 1/4)/2 = 3/8,$
   $P(X = 3) = (1 - 1/4)/2 = 3/8$

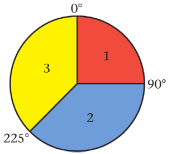


2. Հաշվել $E(2X + 1)$-ը:

   $E(X) = (1/4) + (6/8) + (9/8) = 17/8$:
   $E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = (17/4) + 1 = 21/4 = 5.25$

3. Հաշվել $\mathrm{Var}(3X - 1)$-ը:

Չկեղծված պտուտակը պտտասպված է դիագրամում պատկերված սկավառակից, իսկ X պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:



1. Գտնել X-ի բաշխման օրենքը:

   $P(X = 1) = 1/4,$
   $P(X = 2) = (1 - 1/4)/2 = 3/8,$
   $P(X = 3) = (1 - 1/4)/2 = 3/8$

2. Հաշվել $E(2X + 1)$-ը:

   $E(X) = (1/4) + (6/8) + (9/8) = 17/8:$
   $E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = (17/4) + 1 = 21/4 = 5.25$

3. Հաշվել $\mathrm{Var}(3X - 1)$-ը:

   $\mathrm{Var}(X) = (1/4) + (12/8) + (27/8) - (17/8)^2 = 39/64 \approx 0.61$
   $\mathrm{Var}(3X - 1) = 9\mathrm{Var}(X) \approx 5.5:$

Դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում
Սահմանում

- Երբ նետում ենք չկեղծված զառ, որի նիստերին գրված են 1-ից 6 թվերը, սպանում ենք պատահական մեծություն, որը իր բոլոր արժեքներն ընդունում է նույն՝ 1/6-րդ հավանականությամբ:
- Ընդհանուր դեպքում, կասենք որ X պատահական մեծությունն ունի դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում, եթե այն իր հնարավոր յուրաքանչյուր x_i արժեք ընդունում է նույն հավանականությամբ:
- Հետևաբար, եթե $X(\Omega)$-ն ունի n փարր և X-ը ունի դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում, ապա $P(X=x)=1/n$ բոլոր x-երի համար $X(\Omega)$-ից:
- Հաճախ X-ը որոշված է $\{1,2,3,\ldots,n\}$ բազմության վրա: Այս դեպքերում մաթ.-սպասումն ու դիսպերսիան տրվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$E(X)=\frac{n+1}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{n^2-1}{12}:$$

- Այս բանաձևերն անգիր սովորել հարկավոր չէ: Սակայն օգտակար է իմանալ, որ նրանք գոյություն ունեն և հարկ եղած դեպքում կարելի է գտնել ու օգտագործել:

$\{0, 1 \ldots, 9\}$ թվերի աղյուսակից պատահականորեն և հավասար հնարավորություններով ընտրում ենք մի թվանշան և նշանակում X-ով:

- Գտնել X-ի մաթ.-սպասումն ու ստանդարտ շեղումը:

- Գտնել հավանականությունը, որ X-ը գտնվում է մաթ.-սպասումից մեկ ստանդարտ շեղում հեռավորությամբ միջակայքում:

$\{0, 1 \ldots, 9\}$ թվերի աղյուսակից պատահականորեն և հավասար հնարավորություններով ընտրում ենք մի թվանշան և նշանակում X-ով:

- Գտնել X-ի մաթ.-սպասումն ու ստանդարտ շեղումը:
  Նշանակենք $Y = X + 1$, այն ունի հավասարաչափ բաշխում $\{1, \ldots, 10\}$-ի վրա: Հետևաբար

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{11}{2} - 1 = 4.5,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{99}{12} = 8.25,$$
$$\sigma = \sqrt{8.25} = 2.87:$$

- Գտնել հավանականությունը, որ X-ը գտնվում է մաթ.-սպասումից մեկ ստանդարտ շեղում հեռավորությամբ միջակայքում:

$\{0, 1 \ldots, 9\}$ թվերի աղյուսակից պատահականորեն և հավասար հնարավորություններով ընտրում ենք մի թվանշան և նշանակում X-ով:

- Գտնել X-ի մաթ.-սպասումն ու ստանդարտ շեղումը:
  Նշանակենք $Y = X + 1$, այն ունի հավասարաչափ բաշխում $\{1, \ldots, 10\}$-ի վրա: Հետևաբար

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{11}{2} - 1 = 4.5,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{99}{12} = 8.25,$$

$$\sigma = \sqrt{8.25} = 2.87 :$$

- Գտնել հավանականությունը, որ X-ը գտնվում է մաթ.-սպասումից մեկ ստանդարտ շեղում հեռավորությամբ միջակայքում:

$$\begin{aligned} P(X \in [4.5 - 2.87, 4.5 + 2.87]) &= P(X \in [1.63, 7.37]) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = 7) \\ &= 6 \times (1/10) = 0.6 : \end{aligned}$$

Վերջնարդյունքները

- հասկանա, թե ինչ է անընդհատ պատահական մեծությունը,
- իմանա հավանականության խտության ֆունկցիայի հատկություններն ու օգտագործի դրանք խնդիրներ լուծելիս,
- օգտվի հավանականության խտության ֆունկցիայից հավանականություններին առնչվող խնդիրները լուծելու համար,
- գտնի բաշխման մեդիանը (կենտրոնական արժեքը, կիսորդիչ) պարզ դեպքերում, հաշվի բաշխման միջինն ու դիսպերսիան

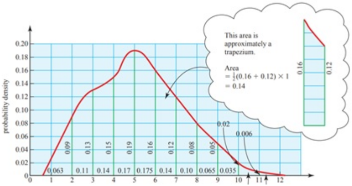
Հավանականության խտության ֆունկցիա

X պատահական մեծությունը կանվանենք անընդհատ, եթե կա «անընդհատ» միջակայք I այնպիսին որ X-ը կարող է ընդունել I-ից կամայական արժեք:

X անընդհատ պատահական մեծության $f(x)$ հավանականության խտության ֆունկցիան սահմանվում է x-ի բոլոր իրական արժեքների համար: Այն ունի հետևյալ հատկությունները՝

ա) $f(x) \geq 0$, բոլոր x-երի համար

բ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$:

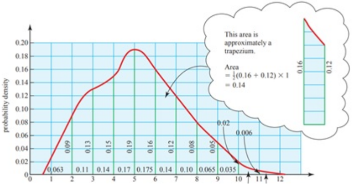


Հավանականության խտության ֆունկցիա

X պատահական մեծությունը կանվանենք անընդհատ, եթե կա «անընդհատ» միջակայք I այնպիսին որ X-ը կարող է ընդունել I-ից կամայական արժեք:

Հավանականությունը, որ X-ն ընկած է $[a, b]$ միջակայքում, տրվում է կետերի միջև ֆունկցիայի գրաֆիկի տակ ընկած մակերեսով: Այդ մակերեսը երբեմն կարելի է գտնել երկրաչափական հատկությունները օգտագործելով, կամ հաշվելով հետևյալ ինտեգրալը՝

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \ :$$

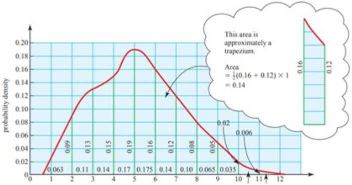


Հավանականության խտության ֆունկցիա

X պատահական մեծությունը կանվանենք անընդհատ, եթե կա «անընդհատ» միջակայք I այնպիսին որ X-ը կարող է ընդունել I-ից կամայական արժեք:

Հավանականությունը, որ X-ն ընկած է $[a, b]$ միջակայքում, փրվում է կետերի միջև ֆունկցիայի գրաֆիկի փակ ընկած մակերեսով: Այդ մակերեսը երբեմն կարելի է գտնել երկրաչափական հատկություններն օգտագործելով, կամ հաշվելով հետևյալ ինտեգրալը՝

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx \;\; :$$



$$P(X \in [6, 7]) = (0.16 + 0.12)/2 = 0.14 \; :$$

X անընդհատ պատահական մեծությունը, որն արժեքներ է ընդունում $[1, 2]$ միջակայքում, ունի հետևյալ հավանականային խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \frac{2}{3}\,x, \qquad \forall x \in [1, 2] :$$

- Ցույց տալ, որ f-ն ունի հավանականության խտության ֆունկցիայի հատկությունները:
- Հաշվել $P(X \in [1.5, 2])$:

X անընդհատ պատահական մեծությունը, որն արժեքներ է ընդունում $[1, 2]$ միջակայքում, ունի հետևյալ հավանականային խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \frac{2}{3}x, \qquad \forall x \in [1, 2] :$$

- Ցույց տալ, որ f-ն ունի հավանականության խտության ֆունկցիայի հատկությունները:
- Նախ, f ֆունկցիան ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ:

  Երկրորդ, $\int_1^2 f(x)\,dx = (2/3)\int_1^2 x\,dx = (1/3)(2^2 - 1^2) = 1$
- Հաշվել $P(X \in [1.5, 2])$:

X անընդհատ պատահական մեծությունը, որն արժեքներ է ընդունում $[1, 2]$ միջակայքում, ունի հետևյալ հավանականային խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \frac{2}{3}x, \qquad \forall x \in [1, 2] :$$

- Ցույց տալ, որ f-ն ունի հավանականության խտության ֆունկցիայի հատկությունները:
- Նախ, f ֆունկցիան ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ:
  Երկրորդ, $\int_1^2 f(x)\,dx = (2/3)\int_1^2 x\,dx = (1/3)(2^2 - 1^2) = 1$
- Հաշվել $P(X \in [1.5, 2])$:
- $P(X \in [1.5, 2]) = (2/3)\int_{1.5}^2 x\,dx = (1/3)(2^2 - 1.5^2) = 0.58$:

$[-1, 1]$-ում արժեքներ ընդունող X անընդհատ պատ. մեծության հավանականային խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = k(1 + x^2), \qquad \forall x \in [-1, 1] :$$

- Գտնել k-ն:
- Հաշվել $P(X \in [0.3, 0.6])$:
- Հաշվել $P(|X| < 0.2)$:

$[-1, 1]$-ում արժեքներ ընդունող X անընդհատ պատ. մեծության հավանականային խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = k(1 + x^2), \qquad \forall x \in [-1, 1]:$$

- Գտնել k-ն:
- Հեշտ է տեսնել, որ
$$\int_{-1}^{1} (1 + x^2)\, dx = 2 + \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$
Հետևաբար $k = 3/8$:
- Հաշվել $P(X \in [0.3, 0.6])$:
- Հաշվել $P(|X| < 0.2)$:

Հավանականության խտության ֆունկցիա

Վարժություն 2

$[-1,1]$-ում արժեքներ ընդունող X անընդհատ պատ. մեծության հավանականային խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = k(1+x^2), \qquad \forall x \in [-1,1]:$$

- Գտնել k-ն:
- Հեշտ է տեսնել, որ

$$\int_{-1}^{1} (1+x^2)\,dx = 2 + \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

  Հետևաբար $k = 3/8$:
- Հաշվել $P(X \in [0.3, 0.6])$:
- $P(X \in [0.3, 0.6]) = \frac{3}{8}\left(0.3 + \frac{0.6^3}{3} - \frac{0.3^3}{3}\right) \approx 0.14$:
- Հաշվել $P(|X| < 0.2)$:

$[-1,1]$-ում արժեքներ ընդունող X անընդհատ պատ. մեծության հավանականային խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = k(1+x^2), \qquad \forall x \in [-1,1]:$$

- Գտնել k-ն:
- Հեշտ է տեսնել, որ

$$\int_{-1}^{1} (1+x^2)\,dx = 2 + \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

  Հետևաբար $k = 3/8$:
- Հաշվել $P(X \in [0.3, 0.6])$:
- $P(X \in [0.3, 0.6]) = \frac{3}{8}\left(0.3 + \frac{0.6^3}{3} - \frac{0.3^3}{3}\right) \approx 0.14$:
- Հաշվել $P(|X| < 0.2)$:
- Քանի որ X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է, կամայական a կետի համար ճիշտ է հետևյալը՝ $P(X = a) = P(X \in [a,a]) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$: Հետևաբար, $P(|X| \leqslant 0.2) = P(|X| < 0.2) + P(X = -0.2) + P(X = 0.2) = P(|X| < 0.2)$: Ստանում ենք՝ $P(|X| < 0.2) = P(|X| \leqslant 0.2) = P(X \in [-0.2; 0.2]) = \int_{-0.2}^{0.2} k(1+x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left(0.4 + \frac{0.2^3 - (-0.2)^3}{3}\right) = 0.152$

- Անընդհատ պատ. մեծության մաթ. սպասում

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \,:$$

- Անընդհատ պատ. մեծության դիսպերսիա

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \big(E(X)\big)^2 \,:$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)^2 f(x)\, dx \,:$$

- Անընդհատ պատ. մեծության մեդիան կամ կիսորդի՝ M այնպիսին որ

$$P(X \leqslant M) = \int_{-\infty}^{M} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \,:$$

Լցակայանում շաբաթական X ծավալով բենզինի վաճառքի համար (100 000 լիտրերով) առաջարկվել է երկու մոդել՝

Առաջին մոդել՝ $f(x) = 2x$, $\forall x \in [0, 1]$

Երկրորդ մոդել՝ $g(x) = 12x^3(1 - x^2)$, $\forall x \in [0, 1]$

- Գտնել առաջին մոդելի դեպքում X-ի մեդիանը:
- Ցույց տալ, որ երկրորդ մոդելում սպանում ենք նույն մեդիանը:
- Երկու մոդելներում գտնել թե միջինում ինչ ծավալով բենզին է վաճառվում:

Լցակայանում շաբաթական X ծավալով բենզինի վաճառքի համար (100 000 լիտրերով) առաջարկվել է երկու մոդել՝

Առաջին մոդել՝ $f(x) = 2x$, $\forall x \in [0, 1]$

Երկրորդ մոդել՝ $g(x) = 12x^3(1 - x^2)$, $\forall x \in [0, 1]$

- Գտնել առաջին մոդելի դեպքում X-ի մեդիանը:
  Քանի որ $2x$ ֆունկցիայի նախնականը հավասար է x^2,
  $$\int_0^M f(x)\,dx = \int_0^M (2x)\,dx = M^2 - 0^2 = M^2 :$$
  Հետևաբար, $\int_0^M f(x)\,dx = 1/2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $M^2 = 1/2$, այսինքն $M = 1/\sqrt{2}$:
- Ցույց տալ, որ երկրորդ մոդելում ստանում ենք նույն մեդիանը:
- Երկու մոդելներում գտնել թե միջինում ինչ ծավալով բենզին է վաճառվում:

Լցակայանում շաբաթական X ծավալով բենզինի վաճառքի համար (100 000 լիտրերով) առաջարկվել է երկու մոդել՝

Առաջին մոդել՝ $f(x) = 2x, \forall x \in [0,1]$

Երկրորդ մոդել՝ $g(x) = 12x^3(1-x^2), \forall x \in [0,1]$

- Գտնել առաջին մոդելի դեպքում X-ի մեդիանը:
- Ցույց տալ, որ երկրորդ մոդելում ստանում ենք նույն մեդիանը:
  Դժվար չէ համոզվել, որ g-ի նախնականը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝ $12(x^4/4) - 12(x^6/6) = 3x^4 - 2x^6$: Հետևաբար

$$\int_0^M g(x)\,dx = 3M^4 - 2M^6 = \frac{3}{(\sqrt{2})^4} - \frac{2}{(\sqrt{2})^6} = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}:$$

  Սրանից հետևում է, որ $M = 1/\sqrt{2}$-ը կլինի X-ի կիսորդիչ նաև այն դեպքում, երբ X-ի խտության ֆունկցիան g-ն է:
- Երկու մոդելներում գտնել թե միջինում ինչ ծավալով բենզին է վաճառվում:

Լցակայանում շաբաթական X ծավալով բենզինի վաճառքի համար (100 000 լիտրերով) առաջարկվել է երկու մոդել՝

Առաջին մոդել՝ $f(x) = 2x$, $\forall x \in [0, 1]$

Երկրորդ մոդել՝ $g(x) = 12x^3(1 - x^2)$, $\forall x \in [0, 1]$

- Գտնել առաջին մոդելի դեպքում X-ի մեդիանը:
- Ցույց տալ, որ երկրորդ մոդելում սպանում ենք նույն մեդիանը:
- Երկու մոդելներում գտնել թե միջինում ինչ ծավալով բենզին է վաճառվում:
  Քանի որ $xf(x) = 2x^2$ և $xg(x) = 12x^4 - 12x^6$ ֆունկցիաների նախնականները $(2/3)x^3$ և $(12/5)x^5 - (12/7)x^7$ ֆունկցիխներն են,

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = 2/3$$

$$\int_0^1 xg(x)\,dx = \frac{12}{5} - \frac{12}{7} = \frac{24}{35}\ :$$

Հետևաբար, առաջին մոդելում $E(X) = 2/3$, իսկ երկրորդում՝ $E(X) = 24/35$: Երկու մոդելներում կիսորդիչները համընկնում են, իս մաթ.-սպասումները տարբեր են: