ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ

Դաս 5

Ա.ԴԱԼԱԼՅԱՆ

1) Հիշեցում՝ անընդհատ պատ. մեծություն
2) Նորմալ կամ Գաուսյան բաշխում
3) Ստանդարտ նորմալ բաշխման հավանականությունների աղյուսակ
4) Կապը ստանդարտ և ոչ ստանդարտ նորմալ բաշխումների միջև
5) Երկանդամային բաշխման մոտարկումը նորմալ բաշխմամբ

1) Հիշեցում

X-ը անընդհատ պատ. մեծ. է, եթե արժեքներ է ընդունում I անընդհատ միջակայքում:

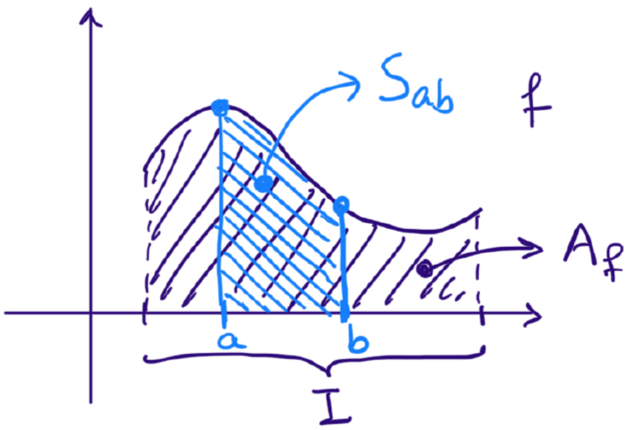
$I = [a,b]$ $\quad I =]-\infty; +\infty[$

$I = (-\infty; +\infty)$

$I = [0; +\infty)$

Խտության ֆունկցիա՝ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

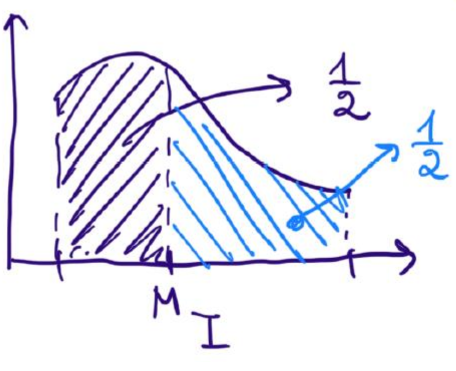
$A_f = 1$



$P(X \in [a,b]) = S_{ab}$

* M-ը X-ի կիսորդիչն է, եթե

$$P(X \leq M) = \frac{1}{2}$$

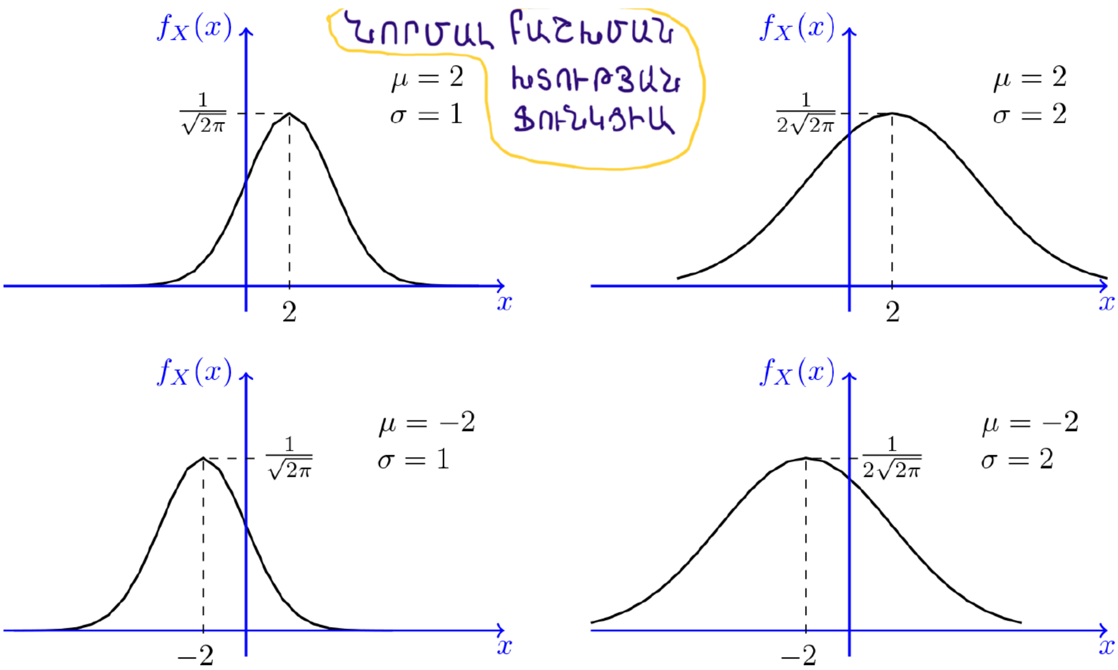


* Եթե ինտեգրալի գաղափարին ծանոթ եք, ապա

$$E(X) = \int_I x f(x)\,dx$$

$$Var(X) = \int_I x^2 f(x)\,dx - (E(X))^2$$

2) Նորմալ կամ Գաուսյան բաշխում



<u>Սահմ.</u> X-ը ունի նորմալ բաշխում, եթե այն անընդհատ պատ. մեծ. է $I = (-\infty; +\infty)$ և գոյություն ունեն $\mu \in \mathbb{R}$ և $\sigma > 0$ պարամետրեր, որ X-ն ունի հետևյալ խտության ֆունկցիան

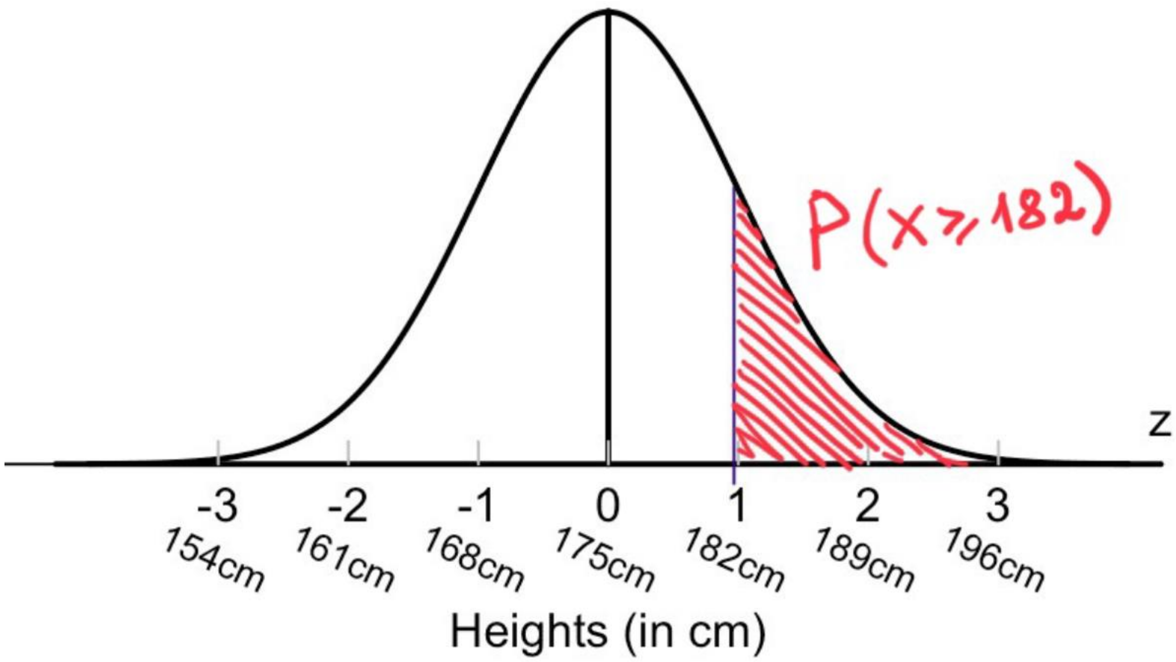
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$* \; f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \qquad f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \to \pm\infty \qquad f(x) \longrightarrow 0$$

$f(\mu + t) = f(\mu - t)$ f-ը սիմետրիկ է μ-ի նկատմամբ:

Օրինակ՝ տղամարդկանց հասակը



$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = 175 \quad \sigma = 7$$

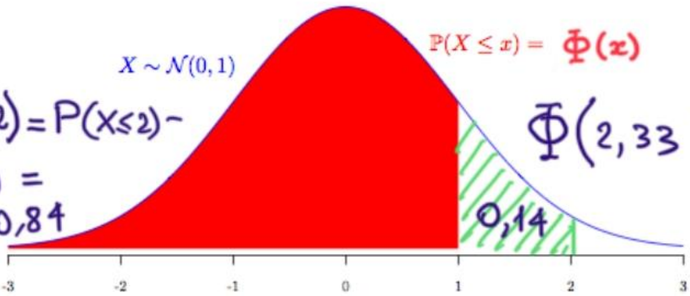
$$P(X \geq 182)$$

Սահմ Կասենք, որ X-ն ունի ստանդարտ նորմալ բաշխում, եթե $\mu=0$ և $\sigma=1$:

μ-ն X-ի
* կիսորդիչն է
* մոդն է
* միջինն է

σ-ն X-ի ստանդարտ շեղումն է:

3. Ստանդարտ նորմալ բաշխման հավանականությունների աղյուսակ



$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) -$
$- P(X \leq 1) =$
$= 0,98 - 0,84$
$= 0,14$

$\Phi(2,33) = 99\%$

$\Phi(1,64) = \mathbf{0,95} = 95\%$ //

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

X ունի $\mathcal{N}(0,1)$ բաշխում

նշ. $\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

$\Phi(x)$ - բաշխման ֆունկցիա

գումարային (կուտակային)

$$* \quad P(\underbrace{X<1}) + P(\underbrace{1 \leq X \leq 2}_{\text{անհամատեղելի}}) = P(\{X<1\} \cup \{1 \leq X \leq 2\}) = P(X \leq 2)$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1)$$
$$= P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(1)$$

$$* \quad P(X \geq 0{,}6) = 1 - P(X < 0{,}6)$$
$$= 1 - P(X \leq 0{,}6)$$
$$= 1 - \Phi(0{,}6)$$
$$= 1 - 0{,}73 = 0{,}27 = 27\%$$

$$* \quad P(X \leq -0{,}4) = P(X \geq 0{,}4)$$
$$= 1 - P(X \leq 0{,}4)$$
$$= 1 - 0{,}66 = 0{,}34 = 34\%$$

4. Կապը ստանդարտ և ոչ ստանդարտ նորմալ բաշխումների միջև

Ենթադրենք X-ը ունի $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ նորմալ բաշխում: Սահմանենք

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ պատ. մեծությունը:

Թեորեմ Եթե $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ապա $Y \sim \underline{\mathcal{N}(0,1)}$ ստանդարտ նորմալ:

Հետևաբար

$$P(X \le a) = P(X - \mu \le a - \mu)$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Y} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$$

$$= P\Big(Y \le \frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$$

Եթե a, μ և σ հայտնի են, կարող ենք հաշվել $P(X \le a)$-ն:

__Վարժ.__ $X \sim \mathcal{N}(4, 25)$ $\mu = 4$ $\sigma^2 = 25$

ա) $P(X \le 5)$ $\sigma = 5$

բ) $P(4{,}5 \le X \le 6)$

գ) $P(X > 1)$

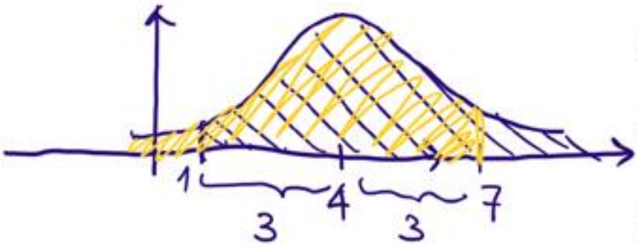
ա) $P(X \le 5) = \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{5-4}{5}\Big)$

$$= \Phi(0{,}2) = 0{,}58 = 58\%$$

բ) $P(4{,}5 \le X \le 6) = \Phi(0{,}4) - \Phi(0{,}1)$

$$= 0{,}66 - 0{,}54 = 0{,}12$$

գ) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-4}{5}\right)$



$= 1 - \Phi(-0{,}6)$

$= 1 - (1 - \Phi(0{,}6))$

$= \Phi(0{,}6)$

$P(X>1) = P(X<7) = \Phi\left(\frac{7-4}{5}\right) = \Phi(0{,}6)$

$= 0{,}73$

ԽՆԴԻՐ 1

Երկու ընկերուհի՝ Զառան և Հերմինեն, հաճախ միասին գնում են փոստ: Նրանք ուղևորվում են Զառայի ավտոմեքենայով: Զառան միշտ Հերմինեին հասցնում է փոստ և իջեցնում այնտեղ: Այնուհետև Զառան մեքենայով շրջում է այնքան ժամանակ, մինչև Հերմինեն ավարտի գործերը, որպեսզի հետդարձին նրան նորից իր հետ տանի: Համաձայն նրանց փորձի, Հերմինեի փոստում մնալու ժամանակը կարող է մոտարկվել նորմալ բաշխմամբ՝ 6 րոպե միջինով և 1.3 րոպե միջին քառակուսային շեղումով: Հերմինեին փոստում իջեցնելուց հետո որքա՞ն ժամանակ անց պետք է Զառան վերադառնա փոստ, որպեսզի առնվազն 95%-ով համոզված լինի, որ Հերմինեն իրեն չի սպասեցնի:

Լուծում

X = Հերմինեի փոստում մնալու ժամանակ

$X \sim \mathcal{N}(6; 1.3^2) \quad \mu = 6 \quad \sigma = 1{,}3$

Գտնել t այնպիսին որ

$$P(X \leq t) = 95\%$$

$$\Phi\left(\frac{t-6}{1{,}3}\right) = 95\%$$

$$\frac{t-6}{1{,}3} = 1{,}64$$

այս արժեքը գտնում ենք աղյուսակից

$$t = 6 + 1{,}64 \times 1{,}3 = 8{,}13 \text{ ր}$$

ԽՆԴԻՐ 2

Կենսաբանը հավաքում է տվյալներ որոշակի տեսակի կակտուսների (*Notocactus rutilans*) բարձրությունների վերաբերյալ: Նա հայտնաբերում է, որ կակտուսների 34.2%-ի բարձրությունը 12 սմ-ից ցածր է, իսկ 18.4%-ինը՝ 16 սմ-ից բարձր: Կենսաբանը ենթադրում է, որ կակտուսների բարձրությունները նորմալ են բաշխված: Գտիր բաշխման միջինը և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում

X = կակտուսների բարձրությունը

$$P(X \leq 12) = 34{,}2\% = 0{,}342$$

$$P(X \geq 16) = 18{,}4\% = 0{,}184$$

$$\mu = ? \qquad \sigma = ?$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}342 \\ \Phi\left(\dfrac{16-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}184 = 0{,}816 \end{cases}$$

Քանի որ $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\mu-12}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}342 = 0{,}658 \\ \Phi\left(\dfrac{16-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}816 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mu-12}{\sigma} = 0{,}41 \\ \dfrac{16-\mu}{\sigma} = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = 0,41\sigma + 12 \\ \mu = 16 - 0,9\sigma \end{cases}$$

$$1,31\sigma = 4 \implies \sigma \approx 3$$

$$\mu = 0,41 \times 3 + 12 = 13,23$$

Պատ.՝ $\mu = 13,23 \quad \sigma = 3$:

ԽՆԴԻՐ 3

Սուպերմարկետում մեկ օրվա ընթացքում վաճառվող խաղողի զանգվածը կարելի է մոդելավորել նորմալ բաշխմամբ: Հաշվել են, որ բավական երկար ժամանակ օրական միջինը վաճառվել է 35 կգ, և որ, միջին թվաբանականով, քսան օրերից մեկում վաճառվել է 15 կգ-ից քիչ:

(ա) Ցույց տուր, որ մեկ օրվա ընթացքում վաճառված խաղողի զանգվածի միջին քառակուսային շեղումը 12.2 կգ է, 3 իմաստալից թվանշանների ճշտությամբ:

(բ) Տրված է, որ որոշակի օրվա ընթացքում վաճառվել է ավելի քան 53 կգ: Հաշվիր հավանականությունը, որ այդ օրը վաճառվել է 56 կգ-ից ավելի խաղող:

Լուծում

ա) X = 1 օրվա վաճառված խաղողի զանգվածը:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = 35 \qquad P(X \leq 15) = 0,05$$

$$\Phi\left(\frac{15-35}{\sigma}\right) = 0,05$$

$$\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$\frac{20}{\sigma} = 1,64 \qquad \sigma = \frac{20}{1,64} = 12,195$$

բ) $P(X \geq 56 \mid X \geq 53)$

$$A = \{X \geq 56\} \qquad B = \{X \geq 53\}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A) = P(X \geq 56) = 1 - P(X < 56)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{56-35}{12{,}2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1{,}72) = 1 - 0{,}96 = 4\%$$

$$P(B) = 1 - \Phi\left(\frac{53-35}{12{,}2}\right) = 1 - \Phi(1{,}47)$$

$$= 1 - 0{,}93 = 7\%$$

$$P(A \mid B) = \frac{4}{7} \approx 57\%:$$

Գալտոնի տախտակ

Galton board