④ Ն.Ք.Գ.-ի ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիտարկենք որ դիտարկված ենք հետևյալ մոդելը՝

(1) $Y = X\beta^* + \xi \iff Y_i = X_i \cdot \beta^* + \xi_i \; ; i=1,\dots,n$

Այսուհետև կենթադրենք, որ բավարարված է հետևյալ պայմանը՝

ՊԱՅՄԱՆ (Ա)

- X մատրիցը պատահական չէ և $X^T \cdot X$-ը հակադարձելի մատրից է։
- $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ և $Var[\xi_i] = \sigma^2 < +\infty$ բոլոր i-երի համար։ Ենթադրենք նաև $\xi_1, \dots, \xi_n$-ը միմյանցից անկախ են։

Հիշեցնենք, որ նվազագույն քառակուսիների գնահատականը սահմանվում է որպես

$$\hat\beta \in \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|_2^2 = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - X_i\beta)^2$$

և հաշվվում է

$$\hat\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

բանաձևով։ Մեզ հետաքրքրում է թե ինչքանով է այս գնահատականը մոտ իրական β^* արժեքին։

ԹԵՈՐԵՄ (Ա) պայմանի դեպքում՝

1) $\hat\beta$-ն β^*-ի անշեղ գնահատական է, այսինքն

$$\mathbb{E}[\hat\beta] = \beta^*$$

2) $\hat\beta$-ի կովարիացիոն մատրիցը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $Var(\hat\beta) = \sigma^2 (X^T \cdot X)^{-1}$։

Ապացույց

1) Քանի որ $Y = X\beta^* + \xi$, ուստի

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^T \cdot X)^{-1} X^T Y \\ &= (X^T X)^{-1} X^T (X\beta^* + \xi) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T X \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi \\ &= \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi\end{aligned}$$

Այստեղից հետևում է (օգտագործելով X-ի ոչ պատահական լինելը), որ

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \underbrace{\mathbb{E}[\xi]}_{=0} = \beta^*$$

2) Օգտագործելով 1)-ում ստացված $\hat{\beta} = \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi$ բանաձևը, ուստի

$$\begin{aligned}Var[\hat{\beta}] &= Var[\hat{\beta} - \beta^*] = Var\left[(X^T X)^{-1} X^T \xi\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X^T X)^{-1} X^T \xi \cdot \xi^T X (X^T X)^{-1}\right] \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}[\xi \cdot \xi^T] X (X^T \cdot X)^{-1} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \cdot (\sigma^2 \cdot I_n) \cdot X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X \cdot (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1}\end{aligned}$$

■

Դիտողություններ

1. Թեորեմի 1-ին մասը ցուցում է, որ եթե կարելի լիներ ստանալ (1)-մոդելի անվերջ քանակով պատահական իրականացումներ և ամեն մի իրականացման համար հաշվել $\hat{\beta}$-ն, ապա ստացված $\hat{\beta}$-երի միջինը հավասար կլիներ β^*-ի (այսինքն պարամետրի ճշգրիտ արժեքին)։

2. Նկատենք, որ X^TX մատրիցի ընդհանուր տարրը գրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(X^TX)_{j,j'} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}X_{ij'} = n \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}X_{ij'}\right)$$

Անորոշաբար՝ փակագծերի մեջ վերցրած արտահայտությունը սահմանափակ է նույնիսկ երբ n-ը ձգտում է $+\infty$: Հետևաբար, $X^TX \approx n\cdot M$, որտեղ M-ը n-ից անկախ է: Դա նշանակում է, որ

$$\mathbb{E}\left[(\hat{\beta}_j - \beta^*_j)^2\right] \approx \frac{M^{-1}_{jj}}{n} \qquad \forall j \in \{1,\dots,p\}:$$

Այսինքն, $\hat{\beta}$-ն β^*-ի ունակայուն գնահատական է, ընդ որում՝ $\hat{\beta}$-ն ձգտում է β^*-ին բավականին արագ $\frac{1}{n}$-ով արագությամբ:

Հ.ք.գ.-ի ավելի խորացված հատկությունները ուսումնասիրելու համար հարկավոր է մտցնել լրացուցիչ պայմաններ:

ՊԱՅՄԱՆ (F)

- $\xi_1,\dots,\xi_n$-ը միմյանցից անկախ են և ունեն Գաուսյան բաշխում՝ $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$:

ԹԵՈՐԵՄ (F) պայմանի դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝

1) $\hat{\beta}$ ունի Գաուսյան բաշխում $\mathcal{N}_p(\beta^*, \sigma^2(X^TX)^{-1})$:

2) Եթե սահմանենք որպես ցրման σ^2-ի գնահատական

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\beta}\|^2}{n-p} = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i\hat{\beta})^2$$

ապա $\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ պատահական մեծությունը ունի χ^2_{n-p} բաշխում:

3) $\hat{\beta}$-ն անկախ է $\hat{\sigma}^2$-ից:

8 Հիշեցում բազմաչափ Գաուսյան բաշխման մասին

Դիցուք μ-ն p-չափանի վեկտոր է և Σ-ն $p \times p$ չափանի մատրից: Եթե Σ-ն սիմետրիկ է և դրական որոշյալ, ապա կանվանենք p-չափանի Գաուսյան բաշխում՝ μ միջինով և Σ կովարիացիոն մատրիցով, այն բաշխումը, որի խտության ֆունկցիան է

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{p/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \\ \forall x \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Այս բաշխումը նշանակենք $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$-ով:

Հատկություններ

1) Եթե X-ի բաշխումն է $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, ապա $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \Sigma_{jj})$.
2) Եթե $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ պատահական վեկտոր է, $a \in \mathbb{R}^m$ և $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$-ն ոչ պատահական վեկտոր և մատրից են, ապա $a + B \cdot X$-ը Գաուսյան վեկտոր է $\mathcal{N}_m(a + B\mu, B\Sigma B^T)$:
3) Եթե $X = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$-ը Գաուսյան վեկտոր է և $Cov(Y, Z) = 0$ ապա Y-ը և Z-ը անկախ են:
4) Եթե $X \sim \mathcal{N}_k(0, I)$, ապա $\|X\|^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ պատահական մեծությունն ունի χ_k^2 բաշխում:
5) Եթե $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ իսկ $\eta \sim \chi_k^2$ և ξ-ն անկախ է η-ից, ապա $\xi / \sqrt{\eta/m}$ պատահական մեծությունը ունի Ստյուդենտի t_m բաշխում: